Calcolo differenziale a una variabile per la fisica

6 dicembre 2016

wikitolearn
collaborative textbooks

This book is the result of a collaborative effort of a community of people like you, who believe that knowledge only grows if shared.
We are waiting for you!

Get in touch with the rest of the team by visiting http://join.wikitolearn.org

You are free to copy, share, remix and reproduce this book, provided that you properly give credit to original authors and you give readers the same freedom you enjoy.
Read the full terms at https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

BY-SA

Indice

1 Limiti **1**

1.1 Definizione di limite e teorema ponte 1

1.2 Limiti notevoli 2

1.3 Continuità di una funzione 5

1.3.1 Punti di discontinuità 6

1.4 Teoremi dei valori intermedi e esistenza degli zeri 7

1.5 Teorema di Weierstrass 11

2 Calcolo Differenziale **13**

2.1 Definizione di derivata 13

2.2 Punti di non derivabilità 15

2.3 Calcolo di derivate 18

2.4 Teorema di Lagrange 23

2.4.1 Approssimazione dell'errore 28

2.5 Derivate successive 29

2.6 Studio asintotico 32

2.7 Sommario sullo studio di funzione 33

2.7.1 Sommario 33

2.7.2 Esempio di studio di funzione 38

2.8 Ordini di grandezza e teoremi di Cauchy e de l'Hôpital 40

2.8.1 Ordini di infinito 41

2.8.2 Ordini di infinitesimo 43

2.8.3 I simboli di Landau 45

2.8.4 Teoremi di Cauchy e de l'Hôpital 46

2.9 Teorema e polinomio di Taylor 48

2.9.1 Approssimazioni polinomiali 49

2.9.2 Taylor: formula, dimostrazione e polinomio 50

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze 56

3.1 Testo 56

3.2 Immagini 57

3.3 Licenza dell'opera 58

Capitolo 1

Limiti

1.1 Definizione di limite e teorema ponte

Lasciamoci alle spalle le successioni e le serie numeriche, pur anticipando che ci saranno utili da ora in avanti per molte definizioni e collegamenti, ed entriamo in un altro ambito dell'analisi di funzioni reali a variabile reale: il calcolo differenziale. Nella prossima sezione tratteremo attentamente e profondamente questo argomento, in questa ci soffermeremo sui limiti di funzioni, pur tenendo presente il fatto che anche questi rientrano nell'ambito del calcolo differenziale.

Abbiamo già parlato di limite studiando le successioni reali. In sintesi, cosa vuol dire *passare al limite*? Dobbiamo *immedesimarci* nella funzione e cercare di capire come questa si comporta in un *intorno del punto* in cui andiamo a studiare il limite. Esistono diversi tipi di limite: daremo la definizione generale di limite ed elencheremo i casi particolari, ricordando che sono anch'esse definizioni.

Definizione (Limite):

Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siano $l,\ x_0 \in \mathbb{R}$ o $l,\ x_0 = \pm\infty$, con la proprietà che $\exists$ un intorno di $x_0 \subset D(f)$. Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se, quando x *è sufficientemente vicino* x_0 , *allora* $f(x)$ *è arbitrariamente vicina a* l

Diamo l'elenco infinito dei casi possibili! Enjoy!

1. $x_0,\ l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon$$

2. $x_0 = +\infty,\ l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon$$

3. $x_0 = +\infty,\ l = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ se } \forall M > 0 : x > M \Rightarrow\ f(x) > M$$

4. $x_0 = +\infty,\ l = -\infty$

$$\lim_{xto+\infty} f(x) = -\infty \text{ se } \forall M > 0 : x > M \Rightarrow\ f(x) < -M$$

5. $x_0 = -\infty,\ l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \text{ se } \forall \epsilon > 0\ \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon$$

6. $x_0 = -\infty,\ l = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ se } \forall M > 0 : x < -M \Rightarrow\ f(x) < -M$$

7. $x_0 = -\infty,\ l = -\infty$

$$\lim_{xto-\infty} f(x) = -\infty \text{ se } \forall M > 0 : x < -M \Rightarrow\ f(x) < -M$$

8. $x_0 \in \mathbb{R},\ l = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ se } \forall M > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ f(x) > M$$

9. $x_0 \in \mathbb{R},\ l = -\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ se } \forall M > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ f(x) < -M$$

Effettivamente erano tantini, non chiediamo perdono per il semplice motivo che la matematica è così. Ora, che collegamento esiste tra i limiti di successioni e limiti di funzioni?

Teorema (ponte):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\ \Leftrightarrow\ \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ tali che } x_n \to x_0,\ \text{si ha che } \lim_n f(x_n) = l$$

Ovvero che, presa una qualunque successione reale che tenda a x_0 si ha che $f(x_n)$ tende a l . Non forniremo la dimostrazione di questo teorema.

In particolare, tutte le proprietà già enunciate per i limiti di successioni valgono anche per i limiti di funzioni (somma, prodotto, ecc..)

1.2 Limiti notevoli

Come abbiamo già visto per le successioni, spesso calcolare limiti di funzioni può non essere così semplice. Moralmente, sostituire all'incognita il valore a cui essa

tende nella funzione è un buon modo di calcolare il limite, salvo però non incappare in forme indeterminate. A tal proposito, per quanto riguarda le funzioni, è possibile *eliminare* la forma indeterminata $\frac{0}{\infty}$ poiché, in questo caso, sia il numeratore che il denominatore tendono a far risultare la frazione un infinitesimo. Lo stesso discorso vale per la forma $\frac{\infty}{0}$ poiché, come prima, numeratore e denominatore tendono a far risultare la frazione un infinito. Tuttavia restano le già elencate forma indeterminate $+\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $0\cdot\infty$ per le quali non è possibile un calcolo esplicito. In virtù di ciò si introducono altri elementi, per quanto riguarda il calcolo dei limiti di funzioni, che semplificano i calcoli e rendono possibile l'annullamento delle forme indeterminate; per questo rimandiamo anche alla sezione del calcolo differenziale.

Tuttavia, prima di parlare di approssimazione polinomiale o della regola di de l'Hôpital è possibile studiare dei casi particolari di limiti, che sono i **limiti notevoli**. Attraverso modifiche alla scrittura della funzione, se si può ricondursi a questi limiti, è possibile semplificare i calcoli o, addirittura, risolvere forme indeterminate. Iniziamo a vederne qualcuno.

Teorema

Possiamo dire che *il seno di un infinitesimo si comporta come l'infinitesimo stesso*, ovvero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Dimostrazione:

Poiché il seno è una funzione periodica, studiamo il caso in cui $0<x<2\pi$. Da un'attenta osservazione grafica della definizione di seno e tangente, risulta evidente che:

$$\sin x\le x\le \tan x$$

Posso dividere tutti i membri della disuguaglianza per $\sin x$ e, ricordando le relazioni tra reciproci, osservare la conclusione:

$$\sin x\le x\le \tan x \Rightarrow\ 1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{\tan x}{\sin x}\Rightarrow 1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}\right)=1\le\frac{x}{\sin x}\le 1\Rightarrow\ \frac{\sin x}{x}\to 1\quad \text{quando } x\to 0$$

Dal limite del seno si possono determinare altri limiti notevoli.

Teorema

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione:

Lavoriamo prima sulla funzione per ricondurla al limite notevole presente sopra; possiamo moltiplicare e dividere la frazione per $1+\cos x$ e, svolgendo i calcoli ottenere:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Passando quindi al limite e ricordando le proprietà delle operazioni:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Allo stesso modo si può dimostrare (esercizio):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Passiamo adesso ad altro tipo di limiti notevoli: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Teorema

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Dimostrazione:

Per il calcolo di questo limite, dovremo lavorare molto sulla serie numerica equivalente all'esponenziale. Come abbiamo nella sezione dedicata alle serie, infatti:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

A questo punto, calcoliamo la differenza tra la funzione di partenza e il limite, ovvero:

$$\frac{e^x-1}{x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n+1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

O, per rimettere le cose a posto:

$$\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| \le |x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = |x|e^{|x|}$$

Quindi, passando al limite per $x \to 0$, abbiamo dimostrato che la differenza tra la funzione e il limite è infinitesima, e possiamo concludere che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Un altro limite importantissimo è il seguente, che sfrutta il precedente appena dimostrato.

Teorema

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Dimostrazione:

Pongo:

$$\begin{cases} y = e^x - 1 \\ e^x = y + 1 \\ x = \ln(y+1) \end{cases}$$

Quindi il limite, dopo questa opportuna sostituzione di variabili diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

1.3 Continuità di una funzione

Parliamo adesso di continuità di una funzione, studiando i limiti. Per fare ciò dobbiamo prima di tutto definire due nuovi tipi di limite, che sono casi particolari della definizione generale.

Definizione (Limite destro e sinistro):

Sia $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione; siano $x_0 \in R$, $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$. Diremo che:

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ se, a patto di essere sufficientemente vicino a x_0 da DESTRA, $f(x)$ e' arbitrariamente vicina a l
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ se, a patto di essere sufficientemente vicino a x_0 da SINITRA, $f(x)$ e' arbitrariamente vicina a l

Da cui un teorema tanto immediato quanto banale (magari anche inutile, ma nulla è inutile in matematica).

Teorema

Sia $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = l$$

La dimostrazione è banale e non la forniremo.

Diamo a questo punto la definizione di continuità.

Definizione (Continuità):

Sia $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in I$. Diremo che $f(x)$ è **continua in** x_0 se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ovvero $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Definizione (Uniforme continuità):

Sia $f(x) : I \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$; si dice che la funzione è **uniformemente continua in** I se:

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 :\ \forall\ x_1, x_2\ \in\ I :\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Per quanto riguarda lo studio della continuità, l'algoritmo da iterare ogni volta è lo stesso:

1. Vedere se la funzione è definita nel punto, e calcolarne il valore;
2. Calcolare limiti destro e sinistro e vedere se sono finiti e coincidenti;
3. Se i limiti coincidono col valore della funzione nel punto, essa è continua nel punto, altrimenti nisba.

1.3.1 Punti di discontinuità

È importante adesso parlare di **punti di discontinuità**. Se, sfruttando l'algoritmo precedente, si trovano alcuni punti di ritorno, ovvero i limiti destro e sinistro non sono finiti o essi non sono uguali al valore della funzione, ci si trova davanti a dei punti di discontinuità. Esistono in generale due tipi di discontinuità, che possono diventare tre osservando vari cari del secondo.

Definizione (Discontinuità di primo tipo (eliminabile)):

Ci troviamo davanti ad un punto di discontinuità del primo tipo se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Questo tipo di discontinuità si chiama eliminabile perché, spesso, basta ridefinire la funzione meglio per eliminarlo. O spesso si è definita la funzione da ubriachi ed è venuta fuori una cosa divertente. Facciamo un esempio per entrambi i casi.

Esempio:

Un esempio di funzione che può essere resa continua ridefinendola è $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Sappiamo infatti che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ma si osserva che, da destra e da sinistra, la funzione tende a 0 in $x_0 = 0$. Quindi possiamo ridefinirla come segue per renderla continua in $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Esempio:

Per quanto riguarda invece gli errori di definizione della funzione, ovvero definirla da ubriachi (si consiglia di non farlo), un esempio è il seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } x \neq 1 \\ \frac{\sqrt[3]{e}-7}{3\pi\sqrt{3e-1}} \text{ per } x = 1 \end{cases}$$

È ovviamente facile correggere questo errore e porre $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cambiamo tipo di discontinuità e passiamo al secondo tipo: questo caso è più tragico e, a differenza di prima, non è possibile correggerlo in alcun modo senza intaccare la funzione.

Definizione (Discontinuità del secondo tipo):

Ci troviamo davanti ad un punto di discontinuità del secondo tipo se:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Possono esserci due casi: o uno tra i limiti destro e sinistro è infinito (o entrambi), oppure sono entrambi finiti ma non coincidenti. Nell'ultimo caso parleremo di *salto della funzione*, che calcoliamo con:

$$s := \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|$$

1.4 Teoremi dei valori intermedi e esistenza degli zeri

Passiamo adesso a dimostrare i teoremi sulle funzioni continue. Per farci un'idea: le funzioni continue sono tante e diverse. Le costanti, le rette, i polinomi, i logaritmi, gli esponenziali, le funzioni goniometriche sono tutte funzioni continue. Inoltre, somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni continue sono anch'esse funzioni continua, prestando attenzione al rapporto e al campo di esistenza del

denominatore. Ci sono diversi teoremi sulle proprietà di queste funzioni, tuttavia dobbiamo fare un passo indietro alla teoria dei numeri reali.

Nell'esporre i reali abbiamo parlati degli assiomi da cui partire per costruire la teoria dell'analisi; tra questi, abbiamo enunciato l'importantissimo **assioma degli intervalli incapsulati**, che affermo che, dati:

$$I_n \supset I_{n+1} \supset I_{n+2} \cdots$$

Intervalli in $\mathbb{R}$, allora possiamo dire che la loro intersezione è diversa dall'insieme vuoto, ovvero:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

.

Da questo assioma si ricava una proprietà importantissima.

Teorema (Proprietà degli intervalli):

Siano

$$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$$

Intervalli dell'insieme dei reali con queste due caratteristiche:

(i) $I_n \supset I_{n+1} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \cdots < \cdots b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq b_n$
(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$

Allora diremo che la loro intersezione è vuota:

$$\exists x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

E inoltre gli estremi tendono al punto x_0 :

$$a_n \to x_0$$
$$b_n \to x_0$$

Dimostrazione:

Supponiamo che $x_0, x_1 \in \bigcap_n I_n$; prendiamo per esempio il caso in cui $x_0 \leq x_1$. Avremo che:

$$0 \leq x_1 - x_0 \leq b_n - a_n$$

Passando al limite per $n \to \infty$, avremo che:

$$0 \leq x_1 - x_0 \leq 0$$

Ovvero x_0 è unico.

Inoltre, è vero che $a_{\leq} x_0 \leq b_n$, quindi:

$$a_n - a_n \leq x_0 - a_n \leq b_n - a_n \Rightarrow \text{ passando al limite } 0 \leq x_0 - a_n \leq 0$$

Quindi, $a_n \to x_0$. Ma posso scrivere $b_n = b_n - a_n + a_n$ e, passando al limite, osservo che, così come $a_n \to x_0$, anche $b_n \to x_0$.

Questa proprietà ci sarà fondamentale per i prossimi teoremi.

Teorema (dei valori intermedi):

Sia $f(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$; sia inoltre $\eta \in (f(a), f(b))$. Allora possiamo dire che esiste almeno un punto dell'intervallo $[a,b]$ tale che $f(x_0) = \eta$:

$$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \eta$$

Si osservi brevemente la scrittura $f(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$. Essa si legge come $f(x)$ *appartiene alle funzioni continue che vanno da un intervallo* $[a,b]$ *in* $\mathbb{R}$ e la useremo spesso d'ora in avanti come notazione.

Dimostrazione:

Sia $f(a) < f(b)$. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in due intervalli di lunghezza uguale: $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. η si troverà tra i valori della funzioni dei due estremi di *uno solo* dei due intervalli. Quindi:

- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta$, è dimostrato il teorema;
- se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \eta$, chiamo $I_1 = [\frac{a+b}{2}, b]$;
- se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \eta$, chiamo $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$.

Avremo a questo punto un intervallo I_1 e posso iterare il processo fatto finora all'infinito, ottenendo intervalli con le seguenti proprietà:

- $I_n \supset I_{n+1}$;
- $f(a_n) < \eta < f(b_n)$;
- $b_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2^n} \to 0$ quando $n \to \infty$, per cui $a_n,\ b_n \to x_0$.

Posso quindi dire che esiste *ed è unico* un punto appartenente all'intersezione tale che si trovi sempre tra gli estremi di ogni intervallo, ovvero:

$$\exists! x_0 \in \bigcap_n I_n : \ a_{<} x_0 < b_n$$

Inoltre, per come ho costruito gli intervalli posso dire:

$$f(a_n) < \eta < f(b_n)$$

Osservo che $f(a_n) \to f(x_0)$ e $f(b_n) \to f(x_0)$ quando $n \to \infty$, ne consegue che:

$$f(x_0) < \eta < f(x_0) \Rightarrow \ f(x_0) = \eta$$

Come volevasi dimostrare.

Questo teorema ha importanti conseguenze; il fatto che una funzione continua assuma tutti i valori compresi tra i valori della funzione agli non esclude che possa anche andare oltre l'intervallo $(f(a), f(b))$, solo che non sempre accade; invece, accade sempre che i valori intermedi siano tutti assunti dalla funzione, com'è intuitivamente comprensibile immaginando il grafico di una qualunque funzione continua.

Teorema (di esistenza degli zeri):

Sia $f(x) \in C([a, b], \mathbb{R})$; sia inoltre $f(a) \cdot f(b) < 0$, ovvero uno dei due estremi sia negativo. Possiamo allora affermare che la funzione si annullerà in almeno un punto:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$$

Questo teorema è una diretta conseguenza del precedente; la dimostrazione è simile a quella precedente ed è lasciata per esercizio.

Corollario (del punto fisso):

Sia $f(x) \in C([a, b], [a, b])$; allora esisterà almeno un punto la cui immagine è se stesso:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$$

Anche per questo corollario non forniremo la dimostrazione poiché diretta conseguenza del precedente.

Teorema

Sia $f(x) \in C([a, b], \mathbb{R})$. Allora:

$$f(x) \text{ invertibile } \Rightarrow f(x) \text{ é strettamente monotona}$$

1.5 Teorema di Weierstrass

Stiamo procedendo bene verso la chiusura di questa sezione. Abbiamo definito il limite, parlato di continuità e abbiamo elencato e dimostrato diverse proprietà delle funzioni continue. In quest'ultimo capitolo affronteremo il teorema fondamentale sulle funzioni continue e poi faremo un piccolo passo indietro, alla teoria degli insiemi numerici.

Teorema (di Weierstrass):

Sia $f(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$. Allora essa **ammetterà massimo e minimo**:

$$\exists \min_{[a,b]},\ \max_{[a,b]} f(x)$$

In questo teorema è fondamentale un'ipotesi, oltre alla continuità: che la funzione sia definita su *un intervallo chiuso e limitato*. Qualora ciò non fosse, il teorema di Weierstrass perde immediatamente di veridicità. (Esempio: $\ln x$ in $(0,1]$ non ha minimo).

Dimostrazione:

Dimostreremo il caso del massimo; per il minimo il procedimento è analogo. Chiamo, per comodità,

$$\Theta := \sup_{[a,b]} f(x)$$

Divido l'intervallo $[a,b]$ in due intervalli di lunghezza uguale, cercando Θ . Il processo è esattamente identico a quello fatto nella dimostrazione della proprietà dei valori intermedi. Otterremo degli intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ con diverse proprietà: $I_n \supset I_{n+1}$, la loro intersezione non è vuota ed è presente un elemento x_0 in esso a cui gli estremi tendono e, quindi, avrò trovato il mio Θ ricercato. Arrestiamolo.

Poiché $f(x)$ è continua in tutto l'intervallo, sarà continua anche in x_0 ; sia $\epsilon > 0$:

$$\exists \delta > 0 : x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow\ f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

Osserviamo che, definitivamente, poiché gli estremi tendono al punto x_0 :

$$a_n, b_n \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow\ I_n \subset (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Definitivamente questo si traduce dicendo che $f(x_0 + \epsilon$ è un **maggiorante** di I_n , quindi:

$$f(x_0) + \epsilon \text{ maggiorante } \Rightarrow\ \Theta \leq f(x_0) + \epsilon$$

Quindi Θ è finito e reale.

C'è un'altra osservazione da fare: $x_0 \in I_n$ ma, per la definizione di Θ , sappiamo che $f(x_0) \leq \Theta$. Ricapitolando tutte queste conclusioni:

$$f(x_0) \leq \Theta \leq f(x_0) + \epsilon \Rightarrow \Theta = f(x_0)$$

Ed è esattamente il **massimo della funzione**, come volevasi dimostrare.

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

2.1 Definizione di derivata

Lo scopo del calcolo differenziale è quello di studiare il comportamento delle funzioni e le loro variazioni intorno ad uno o più punti. Già utilizzate da Leibniz e Newton, la definizione rigorosa di derivata e lo studio del calcolo differenziale si sviluppano a Parigi nel XIX secolo.

Il problema sorge quando si cerca di approssimare il valore che la funzione assume in un punto di cui non conosciamo l'esatto valore numerico, per esempio e^{π} ; attraverso studi di variazione, si arriva, attraverso il calcolo differenziale, ad approssimare al meglio la funzione con altre già note, i polinomi, riuscendo a calcolare con un errore relativamente piccolo il valore cercato.

Definiamo immediatamente gli elementi fondamentali del calcolo differenziale.

Definizione (Rapporto incrementale):

Sia $f(x)$ una funzione definita in almeno due punti x_0, x_1 . Si definisce rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Osservazione Il rapporto incrementale coincide con la *pendenza* della retta secante passante per i punti x_0, x_1 . Dimostriamolo. Data l'equazione della retta passante per due punti:

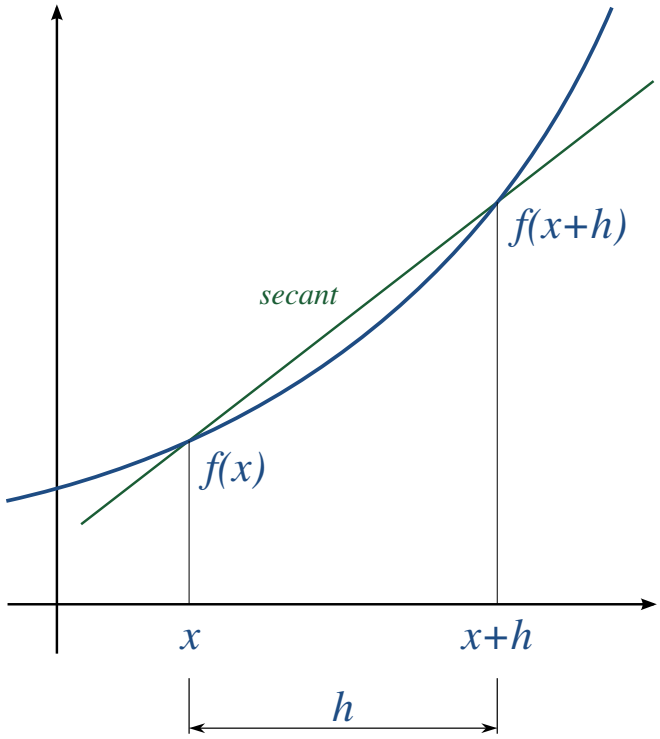
$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \quad \text{con } f(x_1) \neq f(x_0)$$

Calcoliamo quindi la retta passante per $P_0 \equiv (x_o; f(x_0))$ e $P_1 \equiv (x_1; f(x_1))$:

$$y = f(x_0) + \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] \cdot (x - x_0)$$

$$y = \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] \cdot x - \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] \cdot x_0 + f(x_0)$$

Si noti che, appunto, la pendenza della retta coincide col *rapporto incrementale*



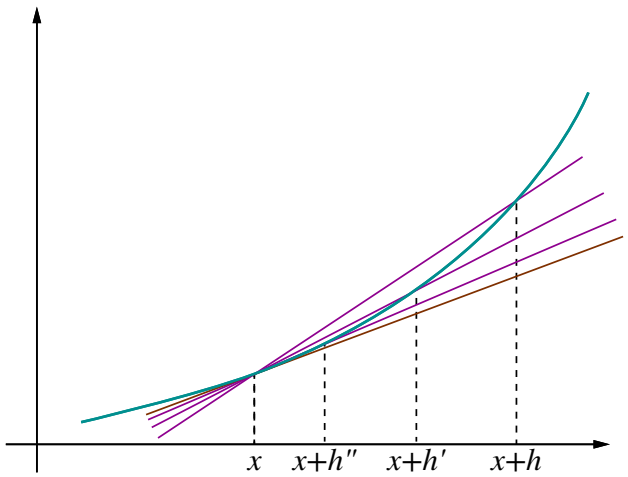
Possiamo ora definire l'ente fondamentale del calcolo differenziale, che descrive la *variazione istantanea* della funzione.

Definizione (Derivata):

Sia $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$; $f(x)$ si dice **derivabile** in x_0 se:

$$\exists \text{finito} \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x) \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Le due scritture sono equivalenti; $f'(x)$ si dice *derivata prima di* $f(x)$ e corrisponde alla pendenza della retta *tangente* a $f(x)$ in x_0 .



Osservazione È fondamentale che il limita *esista e sia finito*: se limite destro e sinistro non coincidono, o almeno uno dei due è $\pm\infty$, la funzione non è derivabile in quel punto. Per come è definita, la derivata è *la miglior approssimazione possibile della funzione vicino al punto*. Inoltre, la derivata prima ci fornisce fin da subito diverse informazioni riguardanti l'andamento della funzione: indicando la pendenza della tangente, più il valore è alto, più *velocemente* la funzione stra crescendo; al contrario, più il valore è basso, più *velocemente* sta decrescendo. È immediato notare che, se la derivata prima è positiva, la funzione cresce nell'intorno del punto considerato, mentre se è negativa decresce. Non possiamo ancora dire nulla quando la derivata prima ha valore nullo.

Teorema
Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , $\Rightarrow f(x)$ è continua in x_0

Dimostrazione:

Utilizziamo la definizione di continuità:

$$\lim_{x_1 \to x_0} [f(x_1) - f(x_0)] = \lim_{x_1 - x_0 \to 0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=0} = \underbrace{f'(x)|_{x_0}}_{\text{esiste finito per ipotesi}} \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

Abbiamo moltiplicato e diviso per $(x_1 - x_0)$

Dunque la funzione è continua in x_0

2.2 Punti di non derivabilità

Dalla definizione di derivata abbiamo visto che il limite deve *esistere ed essere limitato* affinché la funzione possa essere derivabile nel punto. Ci sono ovviamente casi in cui ciò non avviene e la funzione risulta *non derivabile* in un intorno del

punto. In punti di non derivabilità sono diversi e li studiamo caso per caso, a seconda di come si presenta il limite della derivata prima. Da questo elenco è escluso il caso in cui la funzione non sia definita nel punto e il limite della derivata prima è infinito: gli asintoti verranno studiati più avanti in questa sezione.

1. Punto angoloso

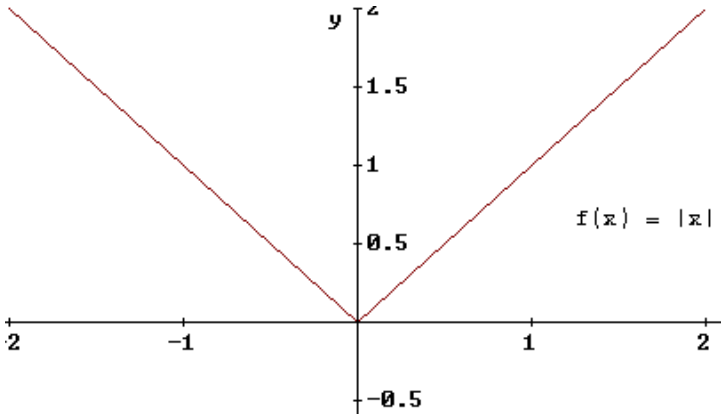
Definizione (Punto angoloso):

Supponiamo esista e sia finito il limite della derivata prima in x_0 , ma sia presente la seguente situazione:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -l$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +l$$

Diremo che x_0 è un *punto angolo*.

Un esempio di punto angolo è $x_0 = 0$ per $f(x) = |x|$



2. Cuspide

Definizione (Cuspide):

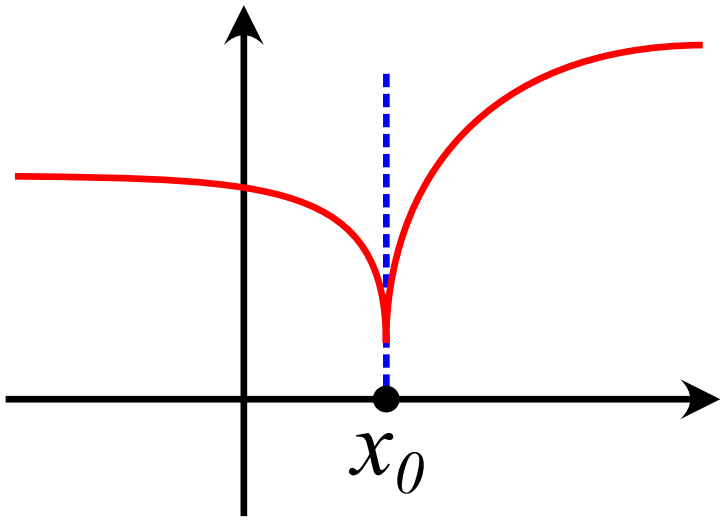
Supponiamo il limite della derivata prima esista e non sia finito e sia presente la seguente situazione:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$$

Diremo che x_0 è una *cuspide*.

Osservazione Per esserci cuspide, la funzione deve essere *definita* in x_0 e i limiti della derivata prima devono essere infiniti e **discordi**.

Un esempio di cuspide è $x_0 = 0$ per $f(x)\sqrt{|x|}$.



3. Flesso a tangente verticale

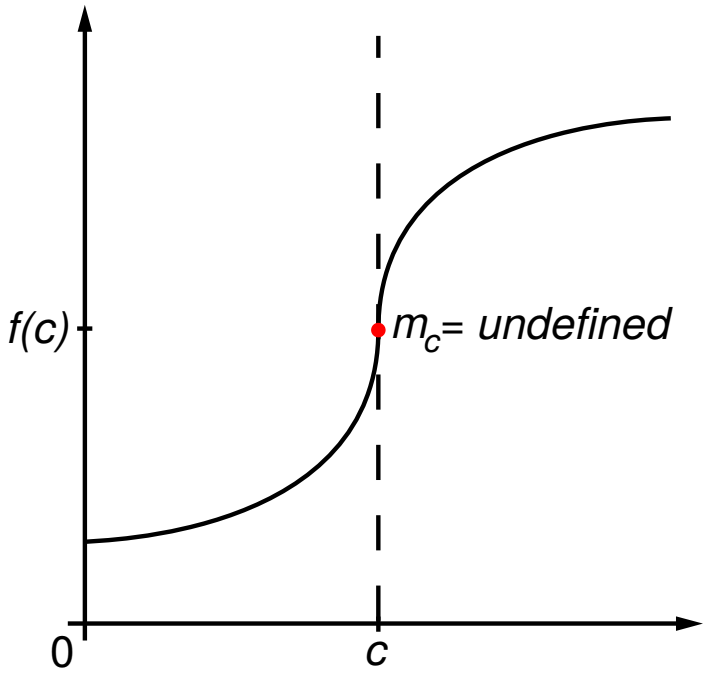
Definizione (Flesso a tangente verticale):

Supponiamo il limite della derivata prima esista e non sia finito e sia presente la seguente situazione:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$$

Diremo che x_0 è un *punto di flesso a tangente verticale*.

Osservazione A differenza della cuspide, in questo caso gli infiniti del limite destro e sinistro devono essere **concordi**; in particolare, come vedremo successivamente, se il limite è $-\infty$ la funzione è decrescente in x_0 ; se invece è $+\infty$, la funzione sarà crescente.



2.3 Calcolo di derivate

Data la definizione di derivata, possiamo sfruttarla, applicandola, per ottenere quelle che sono conosciute come *regole di derivazione*. Nei seguenti teoremi abbrevieremo con *RdD* l'espressione *regola di derivazione*.

Teorema (RdD per la somma):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in x_0 . Si ha:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Teorema (RdD per il prodotto con una costante):

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 e sia $k \in \mathbb{R}$ una costante reale. Si ha:

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k[f(x+h)-f(x)]}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\cdot f'(x)$$

Questi due teoremi sono le due regole fondamentali di derivazione; si noti che la derivata è *applicazione lineare*.

Procediamo ora a calcolare le derivate di funzioni note.

Teorema (RdD per la costante):

Sia $f(x)=k\in\mathbb{R}$. Si ha:

$$Dk=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

Teorema (RdD per la potenza):

Sia $f(x)=x^{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}$ la nostra funzione; si ha:

$$Dx^{\alpha}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned}\lim_{x_1\to x}\frac{(x_1)^{\alpha}-x^{\alpha}}{x_1-x}&=\lim_{x_1\to x}\frac{(x_1-x)\cdot(x_1-x)^{\alpha-1}}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}(x_1-x)^{\alpha-1}\\&=\lim_{x_1\to x}x_1^{\alpha-1}+x_1^{\alpha-2}\cdot x+\cdots+x^{\alpha-1}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Si osservi che, quando $x_1\to x$ *tutti i prodotti diventano della forma* $x^{\alpha-1}$ *, che sono in particolare esattamente* α

Osservazione La derivazione della potenza vale anche per valori di α negativi, razionali o irrazionali (es. π); si ha quindi (lo si provi):

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$
$$D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$
$$D\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x^{10}}}$$

Teorema (RdD per l'esponenziale):

Abbiamo $f(x) = e^x$; si ha che:

$$De^x = e^x$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Si noti il limite notevole all'ultimo passaggio

Osservazione Il fatto che la derivata dell'esponenziale sia l'esponenziale stessa induce ad un'importante conclusione: l'esponenziale *cresce* come se stessa; ciò induce ad affermare che sia una delle funzioni dalla crescita più rapida all'infinito, cosa che verrà poi dimostrata in seguito.

Teorema (RdD per il seno):

Sia $f(x) = \sin x$. Si ha:

$$D \sin x = \cos x$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x}{h} \cdot (\cos h - 1) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x = 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Teorema (RdD per il coseno):

Sia $f(x) = \cos x$. Si ha:

$$D \cos x = -\sin x$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}=0-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

Osservazione Il legame tra le funzioni seno e coseno attraverso l'operatore derivata non deve sorprendere; è noto infatti che il coseno è una traslazione di $\frac{\pi}{2}$ verso destra della funzione seno. Dedurre le ultime considerazioni.

Teorema (RdD per il logaritmo):

Sia $f(x)=\ln x$. Si ha:

$$D\ln x=\frac{1}{x}$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}$$

Applicando un opportuno cambio di variabile:

$$\begin{cases} t=\frac{h}{x} \\ \frac{1}{h}=\frac{1}{x\cdot t}\end{cases}$$

Possiamo riscrivere il limite come segue e, ricordando i limiti notevoli:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+t)}{x\cdot t}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}$$

Osservazione Che la derivata del logaritmo sia definita per $x\neq 0$ è in accordo con il dominio del logaritmo, ovvero $x>0$.

Dopo aver ottenuto le *regole di derivazione* di funzioni note, passiamo a sfruttare la definizione per ottenere regole di derivazione di relazioni tra funzioni. Abbiamo già visto, a inizio capitolo, la derivazione della somma; vedremo di seguito le altre relazioni fondamentali mancanti.

Teorema (Regola di Leibniz per la derivazione del prodotto):

Osservazione preliminare Si è preferito attribuire la giusta paternità di tale regola a Gottfried Leibniz invece che chiamarla genericamente *regola di derivazione*.

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in x_0 . Si ha:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Osservazione preliminare Questa formula è di importanza fondamentale per il calcolo integrale, come vedremo nella prossima sezione.

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Abbiamo aggiunto e sottratto al numeratore $f(x+h)g(x)$ e messo in evidenza per ottenere la formula finale.

Teorema (RdD per il rapporto):

Osservazione Seppur logicamente esatta, *un figlio* non è la *giusta* derivata di un rapporto.

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili, con $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrazione:

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Osservazione Utilizzando la formula di derivazione del rapporto, possiamo calcolare $D \tan x$:

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Teorema (RdD per la funzione composta):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili. La loro composta $f[g(x)]$ è derivabile e vale:

$$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

2.4 Teorema di Lagrange

Dalla definizione di derivata abbiamo visto come essa descriva l'andamento generico di una funzione nell'intorno di un punto; tuttavia, come abbiamo visto, quando $f'(x) = 0$ non si può dire apparentemente nulla sull'andamento della funzione intorno a quel punto. Possiamo però definire il seguente ente e trarne le conclusioni.

Definizione (Punto stazionario):
Sia $f(x)$ derivabile e sia x_0 un punto nel dominio della funzione tale che $f'(x_0) = 0$. Diciamo che x_0 è *punto stazionario*"

In generale, possono essere due i casi in cui la derivata prima può essere nulla: quando si un punto di estremo relativo oppure in caso di flesso a tangente orizzontale. I due casi si distinguono studiando il segno della derivata prima: se la derivata cambia segno nel punto x_0 , vuol dire che si ha un estremo relativo; se il segno resta concorde sia *prima* che *dopo* x_0 vuol dire che x_0 è un flesso a tangente orizzontale o, più semplicemente, *flesso orizzontale*. I punti di flesso verranno studiati più attentamente nel prossimo capitolo, quando studieremo le caratteristiche delle derivata successive di una funzione. In questo capitolo ci *limiteremo* a studiare le proprietà della derivata prima, enunciando e dimostrando uno dei teoremi più importanti del calcolo differenziale.

Abbiamo parlato di estremi relativi, senza però definirli. Iniziamo dal colmare questa lacuna.

Definizione (Estremo relativo):

Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Diremo che x_0 è **massimo relativo** (rispettivamente, **minimo relativo**) se, preso $I \in \mathbb{R}$ un *intorno di* x_0 vale:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

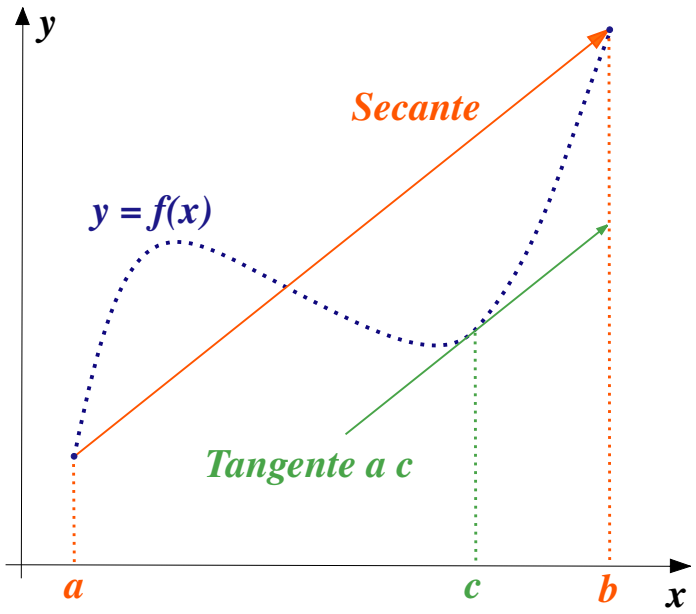
Ricordando le definizioni di *massimo e minimo assoluto*, si può notare che entrambi sono punti di estremo relativo; in questo caso particolare, parleremo di *estremo assoluto nel dominio* di $f(x)$. Da quel che abbiamo detto, si può notare che i punti di estremo relativi sono anche punti stazionari per la funzione. Iniziamo ad avere una maggiore conoscenza di come studiare il comportamento di una funzione, ma andiamo adesso ad enunciare un teorema importantissimo.

Teorema (di Lagrange):

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$, e *derivabile* in (a, b) . Allora esiste almeno un $\psi \in [a, b]$ tale che:

$$f'(\psi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dal punto di vista grafico, ciò significa che, nell'intervallo di definizione della funzione esisterà *almeno un punto* (possono ovviamente essercene più di uno) in cui la tangente al grafico è *parallela* alla retta passante per gli estremi dell'intervallo. Per una più chiara comprensione:



La dimostrazione di questo teorema prevede l'utilizzo delle ipotesi di *un altro* teorema, che ora dimostreremo.

Teorema (di Rolle):

Sia $f(x)$ definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $\varphi \in (a, b)$ tale che:

$$f'(\varphi) = 0$$

Osservazione preliminare Intuitivamente, se una funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo vuol dire che, nell'intervallo, ci deve essere almeno un punto di estremo relativo. Dimostriamolo rigorosamente.

Dimostrazione: (del Teorema di Rolle)

Le ipotesi del teorema (f continua sul compatto $[a, b]$) soddisfano quelle del *teorema di Wierestrass*, per cui la funzione assume *massimo e minimo assoluto* nell'intervallo $[a, b]$. Definiamo quindi:

$$M := \max_{[a,b]} f(x)$$
$$m := \min_{[a,b]} f(x)$$

Distinguiamo due casi.

Se $M = m$, avremo che la funzione è costante, e quindi avremo anche $f(a) = M = m = f(b)$; la derivata di una costante è sempre nulla, quindi la tesi è dimostrata.

Se $M \neq m$, possono esserci vari casi. Prendiamo come esempio quello in cui sia presente un solo punto di massimo, $f(\varphi) = M$ e che il minimo coincida con il valore assunto agli estremi dell'intervallo (in tutti gli altri casi la dimostrazione è analoga). Avremo quindi che:

$$f(a) = f(b) \leq f(x) \leq f(\varphi) = M \quad \forall x \in [a, b]$$

E quindi:

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(\varphi)}{x-\varphi} \leq 0 & \forall x > \varphi \\ \frac{f(x)-f(\varphi)}{x-\varphi} \geq 0 & \forall x < \varphi \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to \varphi$ da sinistra e da destra, che esistono e coincidono per ipotesi di derivabilità, abbiamo che:

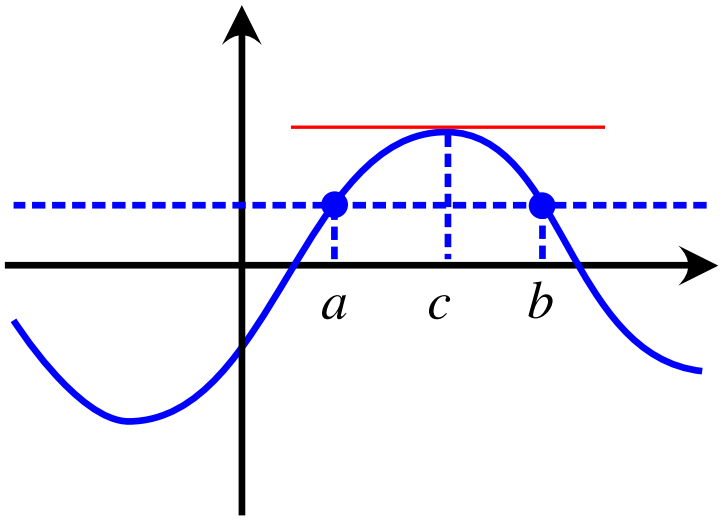
$$f'(x) = \lim_{x \to \varphi} \frac{f(x) - f(\varphi)}{x - \varphi} \leq 0$$
$$f'(x) = \lim_{x \to \varphi} \frac{f(x) - f(\varphi)}{x - \varphi} \geq 0$$

Abbiamo che

$$0 \leq f'(x) \leq 0$$

Da cui la conclusione.

Per comprendere meglio graficamente la situazione che si sta analizzando, si può far riferimento alla seguente immagine:



Ovviamente, la funzione può non essere definita su un intervallo, bensì su unione di intervalli o, come il caso della figura, su tutto l'insieme dei reali. Si può operare sul dominio per farlo coincidere con le ipotesi del teorema per poi applicarlo. Come abbiamo appena visto è infatti *essenziale* al fine della validità del teorema che si lavori su un insieme compatto, quindi in $\mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato.

Passiamo alla dimostrazione del Teorema di Lagrange.

Dimostrazione: (del Teorema di Lagrange)

Sia $f(x)$ definita e continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Definiamo la seguente funzione:

$$\phi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Tale funzione rappresenta la distanza verticale tra il grafico di $f(x)$ e la retta secante passante per i due estremi. Notiamo che $\phi(x)$ è continua e derivabile negli intervalli chiuso e aperto; inoltre abbiamo che:

$$\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$
$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Quindi $\phi(x)$ soddisfa tutte le ipotesi del *Teorema di Rolle*, ed esisterà un valore $\psi \in (a, b)$ tale che $\phi'(\psi) = 0$. Abbiamo quindi che:

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow \phi'(\psi) = 0$$
$$\exists \psi \in (a, b) \rightarrow \quad f'(\psi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Come volevasi dimostrare.

Detto questo, non possiamo fermarci qui; il teorema in sé e per sé potrebbe addirittura sembrare *completamente inutile* allo scopo dello studio differenziale, questo da una prima occhiata. In realtà, il teorema di Lagrange è tutt'altro che innocuo, anzi: è uno strumento potentissimo che ci permette, fin da subito, di

analizzare alcuni comportamenti delle funzioni a seconda di come si comportano le derivate prime. Vediamo, quindi, le **conseguenze del teorema di Lagrange** e come queste siano fondamentali nello studio di funzioni.

Teorema

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Possiamo affermare che $f(x)$ **è strettamente crescente in** (a, b) **.**

Ne abbiamo già parlato di questa caratteristica della derivata prima, ma adesso possiamo dimostrarla rigorosamente sfruttando il teorema di Lagrange.

Dimostrazione:

Per ipotesi, la derivata prima è *strettamente* positiva in tutto l'intervallo di definizione; prendiamo due punti $x_1, x_2 \in (a, b)$ tali che $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste $\psi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\psi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Ma, dato che per ipotesi $f'(x) > 0$, il termine al secondo membro è positivo e, per essere soddisfatta la relazione, ne consegue che:

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Allo stesso modo si dimostra l'inverso, ovvero che se la derivata prima è *strettamente* negativa nell'intervallo di definizione, la funzione è *strettamente* decrescente. Continuiamo su questo ritmo e dimostriamo rigorosamente qualcosa che avevamo già detto in precedenza.

Teorema

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Possiamo affermare che $f(x)$ **è costante in** (a, b) **.**

Anche questa volta, nulla di nuovo per noi; procediamo con la dimostrazione.

Dimostrazione:

Prendiamo due punti $x_1, x_2 \in (a, b)$; per il teorema di Lagrange esiste un punto $\psi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\psi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Per ipotesi la derivata prima è sempre nulla, ne consegue che:

$$f(x_2) = f(x_1)$$

Arriviamo infine ad una proposizione particolarmente importante: sfruttando per l'ennesima volta (e non sarà l'ultima) il teorema di Lagrange, studiamo la derivabilità nell'intorno di un punto tramite i limiti della derivata.

Proposizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0$; sia $f(x)$ continua e derivabile in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Supponiamo che esistano e siano finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima:

$$\lim_{x\ tox_0^{\pm}} f'(x) = l^{\pm}, \quad l \in \mathbb{R}$$

Allora $f(x)$ è derivabile in x_0 *se e solo se* $l^+ = l^-$

Dimostrazione:

Sfruttiamo ancora una volta il teorema di Lagrange:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} f'(\xi_-) & \text{se } x < x_0, \quad (x < \xi_- < x_0) \\ f'(\xi_+) & \text{se } x > x_0, \quad (x < \xi_+ < x_0) \end{cases}$$

Dove $\xi_{\pm}$ sono punti compresi in (x, x_0) . Passando ai limiti da destra e da sinistra, per $x \to x_0$, che sappiamo esistere ed essere limitati, otteniamo:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(\xi_-) = l^-$$
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi_+) = l^+$$

Ricordiamo che, per ipotesi, $f(x)$ è derivabile in tutto l'intorno di x_0 , quindi, dalla definizione di derivata, ne consegue che

$$l^+ = l^-$$

2.4.1 Approssimazione dell'errore

Fin qui, il nostro utilizzo indiscriminato del teorema di Lagrange non ha fatto altro che confermare osservazioni già precedentemente fatte. È arrivato il momento di sfruttare completamente quest'arma per iniziare ad avere un'idea più chiara di come si lavora nel calcolo differenziale e di come si può, al meglio, sfruttare le derivate e le loro proprietà per calcoli approssimativi di valori di funzioni.

Partiamo con un problema generico che spesso può capitare: dover calcolare il valore di una funzione in un punto. Prendiamo per esempio il caso in cui volessimo calcolare il valore di $\tan(\frac{2}{7})$. Come procedere? Dalla definizione di derivata, possiamo pensare di *approssimare* il valore della funzione nel punto con quello della sua retta tangente nel punto, ovvero:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Che errore, però, andiamo a commettere compiendo questa approssimazione? Supponendo che $f(x)$ sia derivabile due volte nell'intervallo, con $|f''(x)| < M$, ovvero derivata seconda limitata, quello che vogliamo calcolare è il valore di

$$R(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0$$

Applicando il teorema di lagrange, preso un punto $\xi \in (x, x_0)$, otteniamo:

$$r(x, x_0) = f'(\xi)(x - x : 0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0)$$

Applichiamo ancora una volta il teorema di Lagrange, stavolta prendendo $\zeta \in (\xi, x_0)$ otteniamo:

$$R(x, x_0) = f''(\zeta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

Ciò che dobbiamo calcolare è il valore assoluto di questa quantità; avendo per ipotesi la derivata seconda limitata, osserviamo anche che $|\xi - x_0| \leq |x - x_0|$, possiamo stimare l'errore come:

$$R(x, x_0) = |f''(\zeta)||\xi - x_o||x - x_0| \leq M|x - x_0|^2$$

2.5 Derivate successive

Abbiamo visto come, applicando la definizione di derivata, si ottenga una funzione che esprima la *velocità* con cui la funzione varia nell'intorno del punto. Ma ciò che esprime la velocità è, appunto, una funzione, e non c'è nulla che ci vieti di poter studiare questa a sua volta. Applicando quindi nuovamente la definizione, otteniamo la *derivata della derivata*, che suona brutto di per sé, e chiameremo quindi *derivata seconda*.

Definizione (Derivata seconda):

Sia $f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo chiuso e aperto $[a, b]$ con $Df(x) = f'(x)$. Si definisce, se esiste ed è limitato, **derivata seconda di** $f(x)$ il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x)$$

Intuitivamente, non c'è nulla di nuovo in questo. La derivata seconda può a sua volta essere derivabile e così via, fino all'infinito, se possibile. Si utilizza la seguente notazione per indicare le varie derivate di una funzione:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\text{ funzione} \\
f'(x) &\text{ derivata prima} \\
f''(x) &\text{ derivata seconda} \\
f'''(x) &\text{ derivata terza} \\
f^{(iv)}(x) &\text{ derivata quarta} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &\text{ derivata n-esima}
\end{aligned}
$$

Esistono funzioni derivabili una volta, due volte, infinite volte, mai ecc. Si utilizza la seguente notazione per descrivere la derivibalità di una funzione, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto e $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
&C(I) \equiv C^0(I) := \text{ (funzioni continue in } I \text{)} \\
&C^1(I) := \text{ (funzioni derivabili in } I \text{ con } f'(x) \in I \text{)} \\
&C^n(I) := \text{ (funzioni derivabili } n \text{ volte in } I \text{ con } f^{(n)} \in C(I) \text{)} \\
&C^\infty(I) := \text{ (funzioni infinitamente derivabili in } I \text{)}
\end{aligned}
$$

Ma, oltre a questo, nello studio di funzioni c'è un vantaggio particolare a procedere oltre la derivata prima. Studiamo la convessità e concavità di una funzione e vediamo come calcolarla.

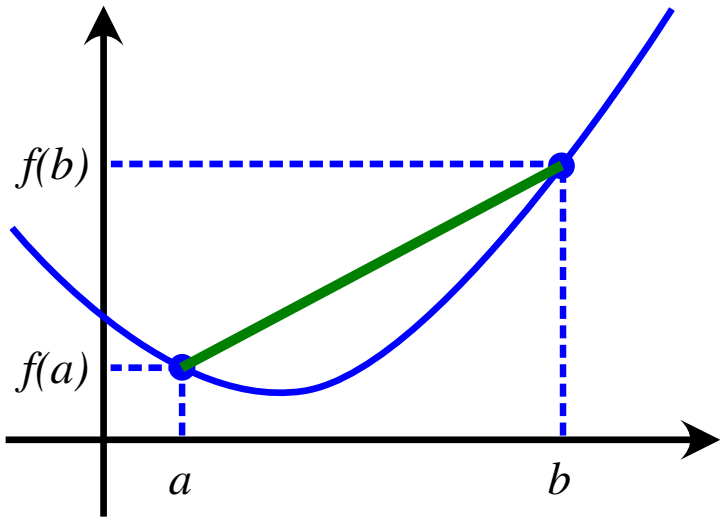
Definizione (Funzione convessa):

Una funzione si dice convessa se, presi due punti $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2$, si ha che:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$$

Preso un $\lambda \in (0, 1)$

Detto così, sembra qualcosa di astruso. Analizziamo l'immagine seguente.



Presi due punti appartenenti all'intervallo e, preso un punto tra i due, che è quindi una *combinazione lineare* di x_1, x_2 con $\lambda \in (0,1)$, ovvero il punto generico:

$$\xi = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

La funzione, per essere convessa nel punto, deve essere minore della stessa *combinazione lineare* applicata alle immagini di x_1, x_2 . Graficamente, quindi, la funzione deve trovarsi *sotto* la retta passante per i due punti. Nel caso ciò non avvenisse la funzione si dice **concava**.

Il corollario successivo è conseguenza del teorema che chiude il capitolo.

Corollario
Sia $f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo chiuso e aperto $[a,b]$. $f(x)$ si dice convessa in x_0 se il suo grafico è sempre *al di sopra* di quello della sua retta tangente. Nel caso contrario, si dice concava.

Ciò vuol dire che, se la funzione si trova *sempre* sopra la retta tangente ad essa nell'intervallo considerato, essa è convessa; concava altrimenti. Ovviamente, se questo è un corollario deve esistere un teorema dietro di esso. Dimostriamo prima questo, poi osserviamo il teorema generale.

Dimostrazione:

Se la funzione deve essere sempre maggiore della sua derivata prima, vuol dire che la differenza tra la funzione e la tangente deve essere positiva, ovvero:

$$R(x,x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$$

Applicando il teorema di Lagrange come nel capitolo precedente:

$$R(x,x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x-x_0)$$

Se $x > x_0$, allora $\xi > x_0$. Essendo la derivata prima crescente *(vedere il teorema successivo)* ne consegue che $f'(\xi) > f'(x_0)$, quindi il termine a destra è positivo perché prodotto di termini positivi. Se $x < x_0$, osserviamo che diventa un prodotto di termini negativi e, quindi, positivo anch'esso.

Procediamo al teorema che ci apre la stra all'utilizzo della derivata seconda.

Teorema

Si $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora:

(i) se $f(x)$ è derivabile una volta, è convessa in $[a,b]$ *se e solo se* $f'(x) \geq 0$ in $[a,b]$ *ovvero non decrescente*;

(ii) se $f(x)$ è derivabile due volte, la funzione è convessa in $[a,b]$ *se e solo se* $f''(x) > 0 \quad \forall \in [a,b]$.

Dimostrazione:

(i) Supponiamo che $f(x)$ sia convessa; deve quindi valere la definizione di convessità data sopra. Passando ai vari limiti otteniamo:

$$\begin{aligned} f'(x) \leq & \frac{f(y)-f(x)}{z-x} && z \to x^+ \\ & \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y) && z \to y^- \\ \Leftrightarrow & f'(x) \leq f'(y) && \forall x \leq y \end{aligned}$$

Che dimostra il punto uno.

Dal teorema se ne deduce una conclusione fondamentale: studiando il segno della derivata seconda, possono essere trovati *punti di flesso obliqui*, in cui la funzione cambia convessità. Abbiamo che, se $f''(x)$ cambia segno in x_0 , x_0 è un punto di flesso.

Nel prossimo capitolo vedremo lo studio asintotico agli estremi dell'intervallo e, nei successivi, vedremo come poter calcolare forme indeterminate grazie al Teorema di De l'Hospytal e come poter approssimare la funzione ad un polinomio grazie alla regola di Taylor.

2.6 Studio asintotico

Lo studio asintotico si pone come obiettivo quello di studiare il comportamento delle funzioni nei punti estremanti del dominio. Possono esistere 3 tipi i asintoti: verticale, orizzontale e obliquo. Vediamo i vari casi in cui si presentano i diversi asintoti e come calcolarli.

Definizione (Asintoto verticale):

Sia $f(x) : I \to \mathbb{R}$; sia $I = (a, b) \cup (b, c)$ (ovvero non sia definita in un punto dell'intervallo). Diremo che $f(x)$ *ha un asintoto verticale in* x_0 *di equazione* $x = x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

È indifferente che i limiti destro e sinistro coincidano; si possono avere infiniti di segno concorde, discorde o presenti solo a destra o sinistra del punto. In questo caso particolare, chiameremo $x = x_0$ un *asintoto verticale destro (o sinistro)*

Definizione (Asintoto orizzontale):

Sia $f(x) : I \to \mathbb{R}$; sia $I = (a, b)$ con a o $b = \pm\infty$. Diremo che $f(x)$ *ha un asintoto orizzontale di equazione* $y = l$ se:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$$

Se $x \to -\infty$, parleremo di *asintoto orizzontale sinistro*; se $x \to +\infty$ allora diremo *asintoto orizzontale destro*.

Osservazione Si noti che $f(x) = \arctan x$ presenta due asintoti orizzontali, uno destro e uno sinistro, per $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Un esempio di asintoto verticale è invece $f(x) = \tan x$, che presenta infiniti asintoti verticali.

Se, quando $x \to \infty$ si ha $f(x) = \pm\infty$, è ovvio che non è presente un asintoto orizzontale. Si potrebbe non dire nulla sull'andamento della funzione a questo punto, ma definiamo l' *asintoto obliquo* e vediamo che potrebbe essere presente.

Definizione (Asintoto obliquo):

Sia $f(x) : I \to \mathbb{R}$, I come per l'asintoto orizzontale. Se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Diremo che $y = ax + b$ è l' *asintoto obliquo* della funzione.

A questo punto, resta solo da determinare i valori delle costanti. Osserviamo che, se è vera la definizione:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} + a - a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + a = a$$

Quindi, qualora esistesse e fosse finito, per determinare il coefficiente angolare della retta basta calcolare il $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ Per calcolare la costante b , a questo punto, non resta che calcolare il $\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b$. Se esiste ed è finito, abbiamo la retta a cui il grafico della funzione tende all'infinito.

Terminiamo con un elenco di come studiare il comportamento asintotico di una funzione.

1. Studio dei limiti della funzioni ai punti estremanti del dominio, riconoscendo i vari casi, se presenti;
2. Nel caso fosse possibile l'esistenza di un asintoto obliquo, procedere:
   (a) Calcolando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$;
   (b) Calcolando quindi $\lim x \to \infty[f(x) - ax] = b$.

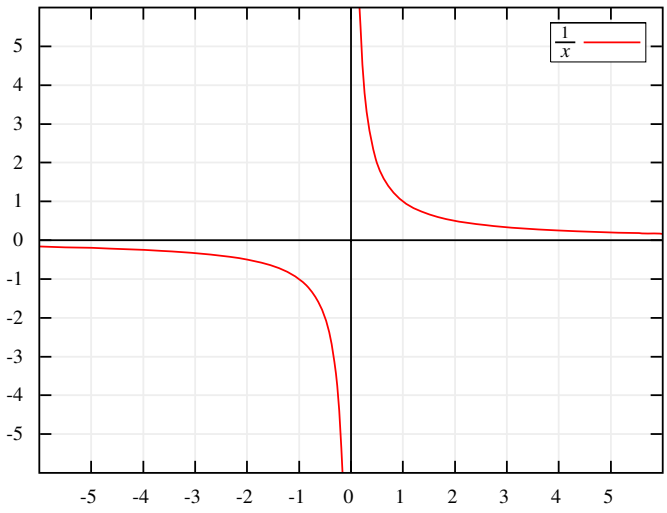
Un riassunto di tutte le informazioni ricavabili sull'andamento della funzione è dato nel prossimo capitolo.

2.7 Sommario sullo studio di funzione

2.7.1 Sommario

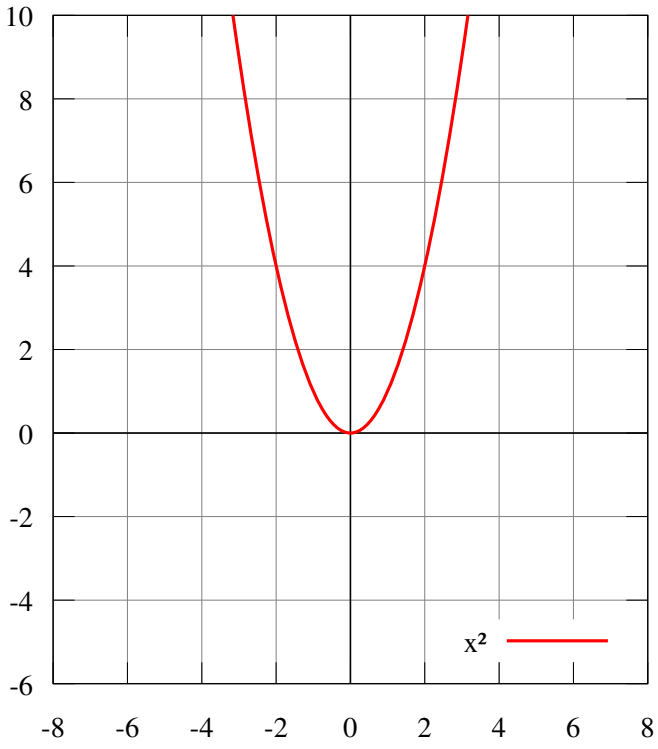
1. **Studio del dominio della funzione:** in che intervallo è definita la funzione? Dove è continua? Dove è discontinua? Quali sono gli asintoti ver-

ticali?Nell'immagine si vede un'iperbole che ha un asintoto verticale in 0.

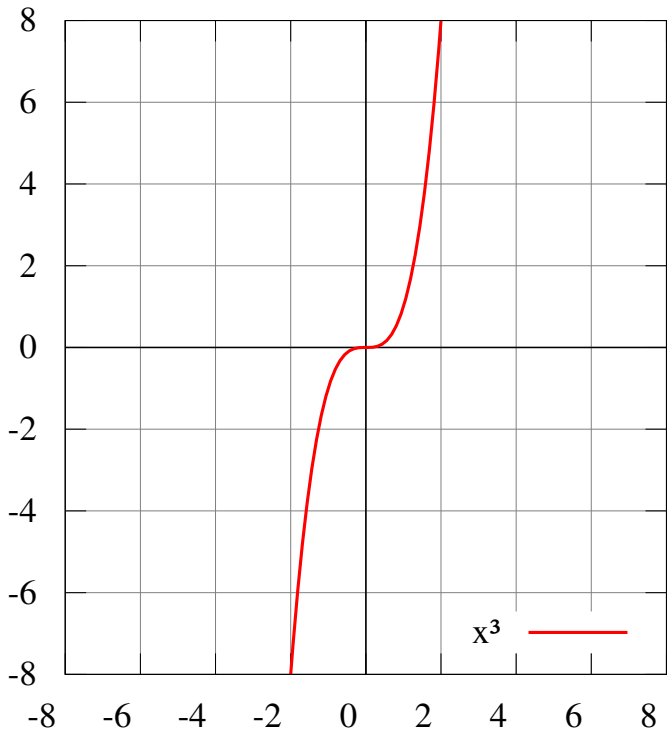


2. **Considerazioni di parità:** La funzione ha qualche particolare simmetria? Ricordiamo che se $f(x) = f(-x)$ la funzione è *pari*, nonchè *simmetrica rispetto all'asse y*, mentre se $f(x) = -f(-x)$ la funzione è *dispari*, nonchè *simmetrica rispetto all'origine*;

   - esempio di funzione pari: x^2



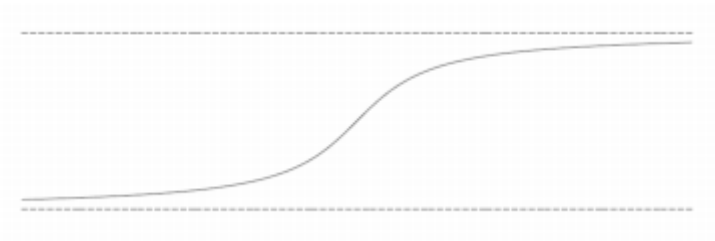
   - esempio di funzione dispari: x^3



3. **Studio del segno e degli zeri della funzione:** dove la funzione è positiva? dove negativa? dove si annulla?;

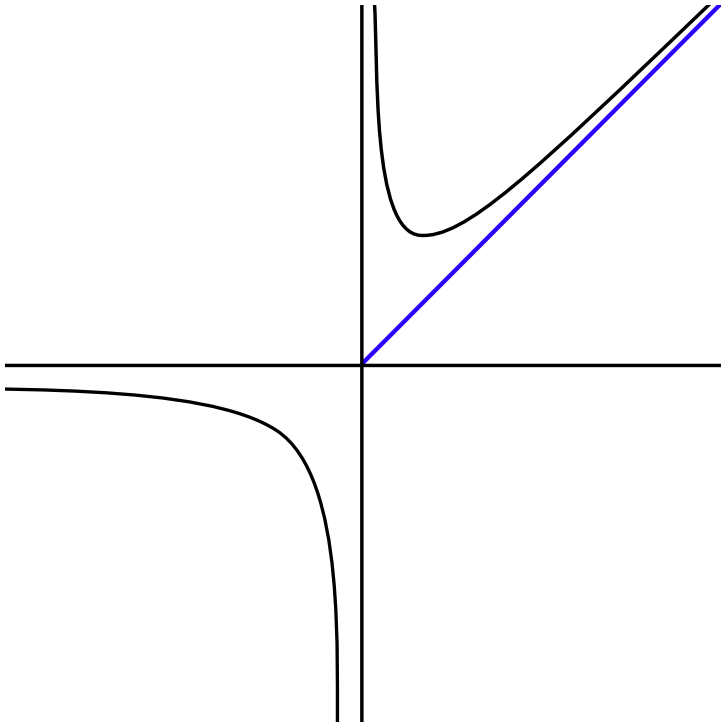
4. Studio dei *limiti della funzione* per i punti di estremo del dominio e ricerca degli **asintoti orizzontali e obliqui:**

   - un asintoto orizzontale si ha se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (asintoto orizzontale destro)o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l'$ (asintoto orizzontale sinistro).In particolare se $l = l'$ l'asintoto è lo stesso a destra e sinistra (la funzione ha lo stesso andamento asintotico per $x \to \pm\infty$);



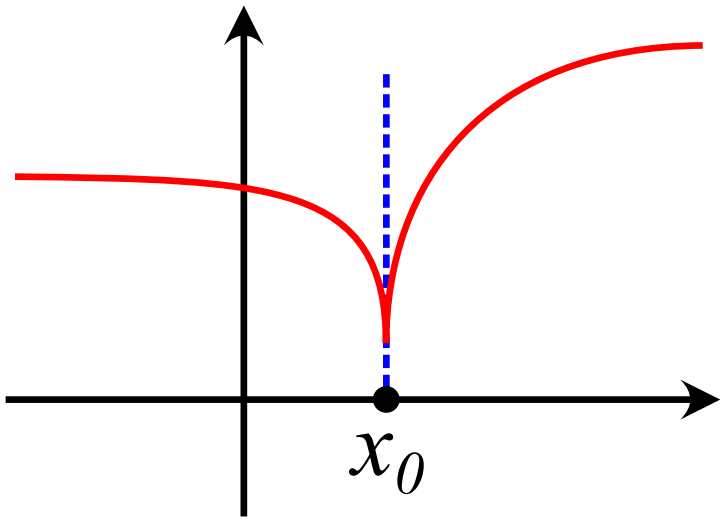
   - un asintoto obliquo si ha se la funzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ a una retta di equazione $y = mx+q$. Se tale retta esiste, ossia se $\exists m, q \quad t.c \quad \lim_{x\to\infty} f(x) - mx - q = 0$,i suoi parametri sono determinati dalle equazioni:

$$\begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \end{cases}$$

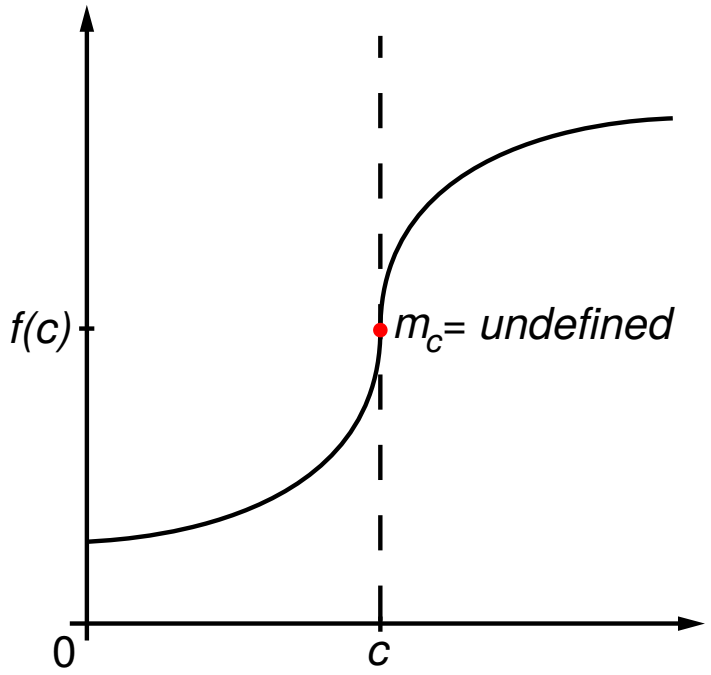


5. **Studio della derivabilità e calcolo della derivata prima:**

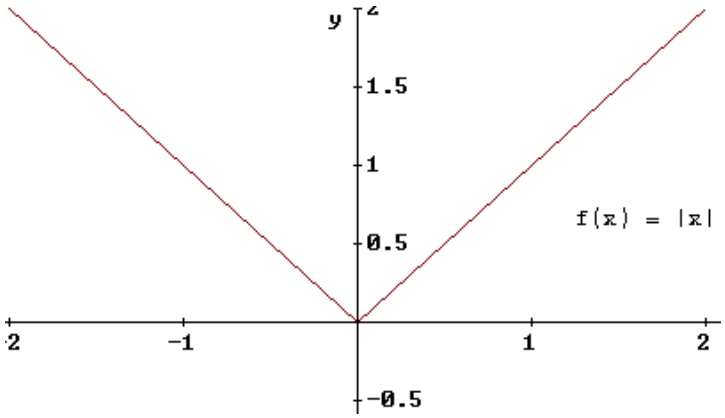
   - nei punti di non derivabilità la funzione può presentare una *cuspide* , un *flesso a tangente verticale* o un *punto angoloso*
     - cuspide:i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti con segno opposto.



     - flesso a tangente verticale:i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti con segno concorde.



- punto angoloso:i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma non coincidenti.



6. **Studio del segno e degli zeri della derivata prima:** dove $f'(x) > 0$ $f(x)$ è crescente, dove $f'(x) < 0$ $f(x)$ è descrescente;

7. Determinare **punti di minimo, massimo e flesso orizzontale** della funzione. Tali punti sono tutti caratterizzati dall' avere $f'(x)|_{x_0} = 0$ e si distinguono per l'andamento della derivata in un intorno del punto:

   - minimo: la funzione è descrescente a sinistra del punto ($f'(x) < 0$ per $x \to x_0^-$)e crescente a destra ($f'(x) > 0$ per $x \to x_0^+$)
   - massimo: la funzione è crescente a sinistra del punto ($f'(x) > 0$ per $x \to x_0^-$) e descrescente a destra ($f'(x) < 0$ per $x \to x_0^+$)
   - flesso orizzontale: la derivata prima non cambia segno in un intorno del punto.

8. **Studio della derivata seconda**, determinando intervalli di convessità, concavità e punti di flesso obliqui;
9. Disegnare un **grafico probabile** della funzione.

2.7.2 Esempio di studio di funzione

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-3}$

Studio del dominio

Le condizioni di esistenza da porre sono:

$$x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$

La funzione dunque è definita negli intervalli $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$ .Possiamo avere asintoti verticali per $x \to -\sqrt{3}^{\pm}$, $x \to +\sqrt{3}^{\pm}$, che studieremo nel dettaglio quando faremo i limiti agli estremi del dominio.

Considerazioni di parità

$f(-x) = \frac{-x^3+1}{x^2-3} \neq f(x) \Rightarrow$ funzione non pari

$-f(-x) = -\frac{-x^3+1}{x^2-3} \neq f(x) \Rightarrow$ funzione non dispari

Studio del segno e degli zeri

1. segno del numeratore: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
2. segno del denominatore: $x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} x > +\sqrt{3}$
3. zeri: li trovo imponendo l'annullarsi del numeratore $\Rightarrow x = -1$

Riassumendo quanto detto:

Limiti agli estremi del dominio

$\lim_{x\to-\infty} = -\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} = -\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} = +\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$\lim_{x\to+\sqrt{3}^-} = -\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$\lim_{x\to+\sqrt{3}^+} = +\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$\lim_{x\to+\infty} = +\infty$

controllo:è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

1. asintoti orizzontali: nessuno
2. asintoti verticali: $x = \pm\sqrt{3}$
3. asintoti obliqui:

$$\begin{cases} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x\cdot(x^2-3)} = 1 \\ q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x}{x^2-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x\cdot(x^2-3)} = 1 \\ q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x}{x^2-3} = 0 \end{cases}$$

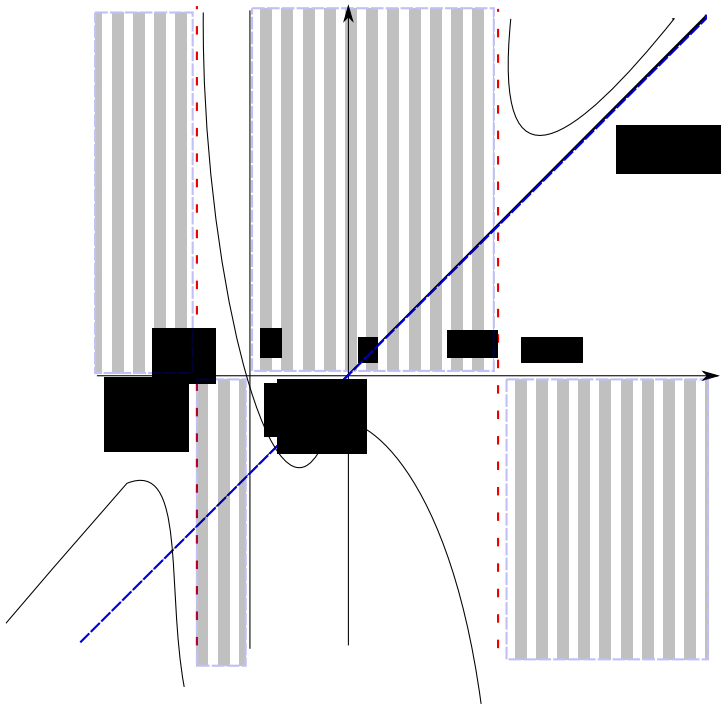
asintoto obliquo $y = x$

Derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\cdot(x^2-3)-(x^3+1)2x}{(x^2-3)^2} \\ &= \frac{x(x^3-9x-2)}{(x^2-3)^2} \end{aligned}$$

1. punti di non derivabilità: $x \in \mathcal{D}_{f'} \cap \mathcal{D}_f$ t.c funzione non derivabile Poichè i possibili punti di non derivabilità sono $x = \pm\sqrt{3}$, già esclusi dal dominio, ove la funzione è continua è anche derivabile
   - segno numeratore:
   $$x(x^3-9x-2) \geq 0$$
   Il polinomio di terzo grado presenta 3 zeri, due minori di 0, siano $-\alpha, -\beta$ e uno maggiore di 0,sia γ , determinabili in valore con metodi di approssimazione numerica ma facilmente individuabili da un semplice studio di funzione. Il numeratore è scomponibile in $x(x+\alpha)(x+\beta)(x-\gamma)$,si annulla in $\alpha, \beta, 0, \gamma$ ed è positivo negli intervalli $(-\infty, -\alpha] \cup [-\beta, 0] \cup [\gamma, +\infty)$
   - segno denominatore: sempre positivo all'interno del dominio.

Saltiamo lo studio della derivata seconda e procediamo al disegno del grafico mettendo insieme le informazioni ricavate.



2.8 Ordini di grandezza e teoremi di Cauchy e de l'Hôpital

Facciamo un breve riepilogo di quanto abbiamo detto e analizzato finora; partendo da un problema generale, ovvero il descrivere l'andamento di una funzione, siamo riusciti a definire l'operatore derivata, ricavarne le formule di derivazione, analizzarne le conseguenze e, proseguendo su questa scia, siamo arrivati a riuscire a disegnare un grafico probabile della funzione analizzata. Perfetto.

Finora abbiamo scherzato. Questo **non vuol dire** che tutto quel che abbiamo visto finora *sia inutile*, anzi: sono senza dubbio risultati interessanti e degni di nota. Ma non sono i più rilevanti nel calcolo differenziale: in questi ultimi due capitoli analizzeremo la potenza di questo strumento, che ci permetterà, oltre a calcolare limiti di forme indeterminate, di *approssimare* le funzioni a dei polinomi. No, non è uno scherzo: $\sin x$ può essere approssimato *perfettamente* a un polinomio. Il che ha dell'assurdo, ma cosa non lo è, in matematica?

Ma procediamo con calma. Quello è l'obiettivo, ma *siamo lontani*. Dobbiamo rimboccarci le maniche, darci da fare e procedere più a fondo nel calcolo differenziale. La prima cosa di cui dobbiamo parlare sono gli **ordini di grandezza.** Prendiamo per esempio la funzione $f(x) = e^x + x$. Cosa possiamo dire quando $x \to \infty$? Moralmente:

$$\lim_{x\to\infty} e^x + x \approx \lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

Questo possiamo dirlo perché l'esponenziale *cresce più rapidamente* del polinomio di primo grado. Ma, rigorosamente, come possiamo rendere l'espressione *più rapidamente* formale? Definiamo ordini di grandezza infiniti e infinitesimali, ne vediamo i vari esempi e le conseguenze.

2.8.1 Ordini di infinito

Partiamo dall'analizzare ordini di infinito per $x \to \infty$; consideriamo appartenenti a questo ordine quelle funzioni tali che:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$$

(Il rispettivo, $x \to -\infty$ è analogo). Appartenenti a questo ordine sono funzioni del tipo e^x , $\log x$, x^α , a^x (con $\alpha, a > 0$), le quali divergono all'infinito. Come possiamo dire quale di queste cresce più rapidamente delle altre? Il metodo **rigoroso** è quello di calcolare il loro rapporto. Ad esempio, possiamo facilmente intuire che x^3 cresca più rapidamente di x^2 , ma per saperlo con certezza calcoliamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

Il che conferma le nostre intuizioni. Allo stesso modo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad \forall \alpha > \beta$$

Procediamo a definire tutto questo.

Definizione (Primo ordine di infinito):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni tali che:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\infty} |g(x)| = +\infty$$

Diremo che **f ha un ordine di infinito superiore rispetto a g per** $x \to \infty$ se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

Allo stesso modo, diremo che **f ha un ordine di infinito minore rispetto a g per** $x \to \infty$ se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Possiamo avere a che fare con due funzione che hanno lo stesso andamento all'infinito. Per esempio, se abbiamo $f(x) = x \quad g(x) = 2x$, abbiamo che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Si potrebbe quindi intuire che, se il rapporto, le funzioni hanno lo stesso ordine di infinito. Approfondiamo un po' la questione. Prendiamo per esempio le funzioni $f(x) = x(1+\cos^2 x), g(x) = x$. Abbiamo che:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\cos^2 x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos^2 x \in [1,2]$$

Quindi, il rapporto non ammette limite, ma sappiamo che $x \leq f(x) \leq 2x$ e, moralmente, f e g tendono all'infinito con la stessa velocità. Quindi, possiamo in generale definire così il successivo ordine di infinito.

Definizione (Secondo ordine di infinito):

Siano $f(x), g(x)$ come sopra; diremo che **f e g hanno lo stesso ordine di infinito per** $x \to \infty$ se:

$$0 < C_1 < \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < C_2$$

Abbiamo trovato un metodo per determinare, quindi, una "scala" di funzioni in base alla loro rapidità. È utile, però, riuscire ad avere un criterio universale che indichi l'ordine di infinito delle funzioni. Passiamo alla definizione.

Definizione

Sia $f(x)$ come sopra, e sia x^α il polinomio con *lo stesso ordine di infinito di* $f(x)$. Diremo che $f(x)$ **è un infinito di ordine α**.

La funzione $|x|$ è detta **infinito campione per** $x \to \infty$.

Osservazione È facile notare (la dimostrazione è data per esercizio) che, nel caso di funzioni razionali con numeratore di grado m e denominatore di grado q, l'ordine di infinito è pari a m-q.

Osservazione Le funzioni logaritmiche ed esponenziali non hanno nessuno ordine di infinito α, ovvero non esistono polinomi tali che abbiano lo stesso ordine di infinito di queste funzioni. Ciò è facilmente dimostrabile, oltre che particolarmente importante, come vedremo in seguito.

È rilevante fare una piccola digressione per quelle funzioni che, all'infinito, presentano un asintoto obliquo. Siano $g(x)$ la funzione da analizzare e sia $h(x) = ax+b$ il suo asintoto; possiamo determinare la funzione $f(x) = g(x) - h(x)$ che sappiamo, per definizione di asintoto obliquo data nel precedente capitolo, tendere a 0 quando $x \to \infty$. Moralmente, $g(x)$ è un infinito di ordine 1.

Tutto quello che abbiamo detto per $x \to \infty$ può essere definito anche per $x \to x_0$.

Definizione (Terzo ordine di infinito):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni tali che:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

Diremo che **f è un infinito di ordine superiore rispetto a g per** $x \to x_0$ **se:**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

Diremo che **f è un infinito di ordine inferiore a g per** $x \to x_0$ se il limite del rapporto è 0 e, infine, dati $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \delta > 0$, se

$$0 < C_1 \leq \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2 \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta$$

diremo che **f e g hanno lo stesso ordine di infinito per** $x \to x_0$.
Definizione

Se $f(x)$ ha lo stesso ordine di infinito di $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ diremo che **f è un infinito di ordine α per** $x \to x_0$.
La funzione $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ è detta **infinito campione per** $x \to x_0$.

Essenzialmente, tutto quello che si è detto per $x \to \infty$ vale anche per $x \to x_0$. In particolare, anche qui le funzioni logaritmiche, per $x \to 0$ hanno un ordine di infinito inferiore a qualsiasi potenza.

2.8.2 Ordini di infinitesimo

Così come è stato fatto per gli ordini di infinito, si può analizzare la rapidità in cui le funzioni tendono a 0. Diamo un'unica definizione per ordine di infinitesimo, osservando che nella scrittura $x \to x_0$ sono inclusi i casi in cui $x_0 \in \mathbb{R}$ e quando $x_0 = \infty$.

Definizione ((unica) Ordine di infinitesimo):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Diremo che **f è un infinitesimo di ordine superiore a g per** $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Se il limite è uguale a $+\infty$, diremo che **f è un infinitesimo di ordine inferiore a g**. Infine, se, preso un intorno di x_0 (per $x_0 = \pm\infty$ si intende valori sufficientemente grandi), vale la relazione:

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2 \quad C_1, C_2 > 0$$

Diremo che **f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo**.

Come nel caso di infiniti, si introducono gli infinitesimi campioni; diamo una definizione unica, osservando che valgono le relazioni come precedentemente elencate (l'esponente dei campioni equivale all'ordine di infinitesimo della funzione).

Definizione (Infinitesimi campioni):

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si prende come **infinitesimo campione**:

$$|x - x_0|$$

Se invece $x_0 = \pm\infty$, il nostro **infinitesimo campione** sarà:

$$\frac{1}{|x|}$$

Si ricorda ancora una volta che è l'esponente dei campioni a definire l'ordine degli infinitesimi.

Prima di passare ai simboli di Landau, diamo qualche esempio di ordini di infinitesimo; utilizzeremo limiti notevoli o lasceremo per esercizio le relazioni non già dimostrate.

Osservazione Vale il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Da cui deduciamo che $\sin x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 0$

Invece, avendo la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, possiamo osservare:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Da cui deduciamo che $\frac{1}{1+x^2}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to \pm\infty$

Un altro limite notevole ormai famoso:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Da cui $1 - \cos x$ sappiamo avere un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0$

Lasciamo questa relazione per esercizio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

(Da cui $\arctan(\frac{1}{x})$ ha un ordine di infinitesimo 1 per $x \to \pm\infty$

2.8.3 I simboli di Landau

Indicare che una funzione ha un ordine di grandezza superiore o inferiore di un'altra può risultare poco pratico, se obbligati a scriverlo per intero. Per nostra fortuna, esistono dei simboli che ci indicano proprio questa relazione. Definiamoli e diamo degli esempi.

Definizione (Simboli di Landau):

Per indicare che una funzione ha un *ordine di grandezza inferiore* di un'altra si usa la notazione:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ovvero il loro limite fa 0; leggiamo la scrittura come: *f è un "o piccolo" di g.*

Allo stesso modo, per indicare che una funzione ha **al più** (ovvero se il loro ordine di grandezza è al massimo lo stesso in un intorno di x_0 l'ordine di grandezza di un'altra utilizziamo:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ovvero il loro limite è limitato superiormente da un valore reale; leggiamo questa scrittura come: *f è un "o grande" di g.*

Per introdurre questa nuova notazione e chiarire le idee, diamo degli esempi in base a quello che abbiamo già detto in questo capitolo.

Poiché il logaritmo ha un ordine di infinito inferiore a qualsiasi potenza per valori molto grandi, mentre l'esponenziale ha un ordine di infinito superiore a qualsiasi potenza:

$$\begin{aligned} \ln x &= o(x^\alpha) \qquad \forall \alpha > 0 \quad \text{per } x \to +\infty \\ x^\alpha &= o(e^x) \qquad \forall \alpha > 0 \quad \text{per } x \to +\infty \end{aligned}$$

Osservazione

$$1 - \cos x = o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Per quanto riguarda gli *O grandi*, invece, scriviamo una breve tabella sfruttando i limiti notevoli.

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$e^x = 1 + O(x)$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\ln(1+x) = O(x)$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\sin x = O(x)$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos}{x^2} = 1$	$\cos x = 1 + O(x^2)$

I simboli di Landau non sono solo belli e carini (oltre che utili a risparmiare tempo); attraverso questi possiamo addirittura modificare il concetto di *derivabilità*. Vediamo come, in breve.

Dalla definizione di derivata, possiamo riscrivere la derivabilità semplicemente portando al primo membro la derivata prima, ottenendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

Osserviamo che, se risulta essere derivabile in x , deve valere questa relazione fondamentale:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad \text{per } x \to 0$$

In parole povere, l'incremento della funzione si può rappresentare come un termine di $f'(x)h$ più un resto che ha un ordine di grandezza inferiore a $h$per $h \to 0$. Magari avete già sentito parlare di differenziale, ma adesso andiamo a definirlo.

Definizione (Differenziale):

Si usa la seguente notazione:

$$df(x;h) := f'(x)h$$

Che chiamiamo **differenziale di f**.

Osservazione Il differenziale è un'approssimazione (con un resto pari a un $o(h)$) dell'incremento:

$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x) \approx df(x;h) \quad \text{per } h \to 0$$

Per rendere l'approssimazione rigorosa, si sfruttano i simboli di Landau:

$$|\Delta f(x;h) - df(x;h)| = o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

Ovvero, il differenziale è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Per quanto riguarda ordini di grandezza abbiamo finito. Sarebbe bello poter dire "amen", ma non è il caso, visto che adesso entriamo nel gorgo del calcolo differenziale. Sebbene pedanti e noiose, tutte queste definizioni ci saranno utilissime per i prossimi teoremi.

2.8.4 Teoremi di Cauchy e de l'Hôpital

Il teorema che andiamo ad enunciare e dimostrare ora è una variante nota del teorema di Lagrange.

Teorema (di Cauchy):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) . Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che:

$$\det \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f'(\xi) \\ g(b)-g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

Breve interpretazione geometrica del teorema di Cauchy: date le due funzione, consideriamo la funzione *vettoriale* $F(f,g)$ che associa ad un punto dell'intervallo $[a,b]$ un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (f,g) . Il teorema afferma che esiste sempre un valore $\xi \in (a,b)$ tale che il vettore incremento $v(f(b)-f(a), g(b)-g(a))$ sia parallelo al vettore derivata $w(f'(x), g'(x))$ calcolato in $x = \xi$.

Procediamo con la dimostrazione.

Dimostrazione:

Consideriamo la funzione:

$$\Phi(x) := \det \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [f(b)-f(a)][g(x)-g(a)] - [f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]$$

Osserviamo che la funzione $\Phi(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) . Abbiamo inoltre che:

$$\Phi(a) = \det \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & 0 \\ g(b)-g(a) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Phi(b) = \det \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f(b)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(b)-g(a) \end{pmatrix} = 0$$

Quindi soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle; esiste allora un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $\Phi'(\xi) = 0$. Osservando che:

$$\Phi'(x) = g'(x)[f(b)-f(a)] - f'(x)[g(b)-g(a)]$$

Ne deriva che:

$$\Phi'(x) = \det \begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f'(\xi) \\ g(b)-g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

Che è la conclusione.

Passiamo ad un altro teorema. Informazione preliminare: il nome del teorema è dato al matematico francese Guillaume Francois Antoine, marchese de L'Hôpital (1661-1704), che pubblicò il teorema nel 1692. La regola è in realtà dovuta a Jean Bernoulli, a cui de L'Hôpital pagava una pensione di 300 franchi annui in cambio degli studi matematici del calcolo infinitesimale. Il marchese pubblicò il teorema in forma anonima ma, una volta che si venne a conoscere il nome, restò nella storia come teorema di de L'Hôpital.

Teorema (Regola di de l'Hôpital):

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili, tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

Allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

Già solo dall'enunciato è effettivamente chiaro quanto sia importante e rilevante questo teorema per il calcolo di limiti di forme indeterminate come $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. L'intuizione di partenza per giungere poi alla dimostrazione è che, se le due funzioni tendono a 0 al limite, il valore del rapporto sarà dato dalla rapidità con cui entrambe arrivano a 0; si può allora pensare di approssimare le funzioni con le rette tangenti ad esse nel punto e, sfruttando simboli e derivabilità di Landau riuscire ad ottenere la tesi. Sia però chiaro, una volta per tutte, che procederemo direttamente con la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione:

Sfruttando il teorema di Cacuhy, poniamo $a = x_0, b = x$, prendendo $\xi \in (x_0, x)$. Abbiamo quindi:

$$\det \begin{pmatrix} f(x) - f(x_0) & f'(\xi) \\ g(x) - g(x_0) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

Ma, visto che per ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$, otteniamo che:

$$\begin{aligned} & f(x)g'(\xi) - g(x)f'(\xi) = 0 \\ & f(x)g'(\xi) = g(x)f'(\xi) \\ & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \end{aligned}$$

Osserviamo che, passando al limite per $x \to x_0$, necessariamente anche $\xi \to x_0$ per continuità della funzione; per ipotesi

$$\lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l$$

Ne segue la conclusione.

2.9 Teorema e polinomio di Taylor

Il capitolo precedente è stata un'agonia di definizioni, ma è finito *col botto*: le forme indeterminate sono solo un ricordo, ora che il teorema di de l'Hôpital è stato dimostrato (osservate che, se il limite delle derivate prime è ancora una forma indeterminata, può essere iterato il processo alle derivate seconde,terze ecc.). Abbiamo preannunciato che possiamo approssimare funzioni a polinomi e, per

vostra fortuna (o sfortuna?) non stavamo scherzando. Giusto per farci un'idea, partiamo dalla funzione $f(x) = \sin x$ e vediamo come possiamo approssimarla a un polinomio sfruttando il teorema di de l'Hôpital. Questo algoritmo è macchinoso e può essere fatto per qualsiasi funzione nota, ma Taylor arriverà a salvare la vita (e i neuroni) di noi umani e sarà più facile calcolarli. Ma prima, un po' di sano sadismo matematico.

2.9.1 Approssimazioni polinomiali

Abbiamo scelto come cavia $\sin x$. Sappiamo essere derivabile in 0, e la sua derivata $f'(x) = \cos x$ vale 1 in 0, quindi:

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Che equivale a dire:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

Per avere una migliore approssimazione, proviamo a cercare un errore che sia un $o(x^2)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = ?$$

Sfruttiamo il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Ciò vuol dire che la funzione seno può essere anche scritta come:

$$\sin x = x + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi, l'errore che si commette approssimando il seno col polinomio di primo grado è un $o(x^2)$, che è una migliore approssimazione della precedente. Iteriamo il processo per ottenere un errore di ordine superiore al terzo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

Da cui deduciamo che $\sin x = x + O(x^3)$; portando il valore $-\frac{1}{6}$ al primo membro otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x - \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$$

Ovvero, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$ più un errore superiore a x^3 , ovvero:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

Possiamo iterare ancora il processo (stavolta lasciandolo per esercizio), e troveremo una migliore approssimazione del seno pari a:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

Tutto questo processo può essere fatto anche per altre funzioni; (per esercizio) possiamo anche calcolare l'approssimazione polinomiale di e^x , ottenendo:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

Con questo processo, stiamo iterando a ordini sempre più alti una funzione nota. Questo algoritmo conduce direttamente al famoso *polinomio di Taylor*.

2.9.2 Taylor: formula, dimostrazione e polinomio

Entriamo nel turbine finale in cui approderemo grazie al calcolo differenziale; useremo tutte le conoscenze finora accumulate. Partiamo fin da subito dal fare un breve resoconto del concetto di derivata: cercavamo un ente che descrivesse l'andamento oggettivo della funzione quando questa tendeva ad un punto, e ricavammo la derivata prima, ovvero il coefficiente angolare della tangente alla funzione in quel punto. Utilizzando quindi i simboli di Landau, possiamo riprodurre quello che abbiamo fatto sopra con $\sin x$ come segue, tenendo a mente l'equazione della retta tangente: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Attenzione a questa conseguenza diretta e *non banale*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \to 0$$

Ovvero, la funzione si approssima con quella della sua tangente con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore a 1.

Proviamo ad ottenere un'approssimazione più precisa. Supponiamo che la funzione sia derivabile due volte in x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

(il calcolo è reso possibile dal teorema di de l'Hôpital). Possiamo riscrivere il seguente limite come:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2]}{(x - x_0)^2} = 0$$

Oppure, riutilizzando ancora i simboli di Landau (bisognerebbe fargli una statua!):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Nulla di strano? Stiamo ottenendo un polinomio che approssimi la funzione data. Iteriamo ancora una volta, stavolta ci risparmiamo i calcoli (per esercizio, confermate questa conseguenza) e otteniamo che:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o(|x - x_0|^3)$$

Ci sarebbe da aspettarsi una formula generale. Procediamo: teorema, definizione, dimostrazione. E poi avrete un uomo morto da tempo come ottimo sostituto di dio.

Teorema (Formula di Taylor):

Sia $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Dato $n \in \mathbb{N}$, posto per definizione:

$$T_n(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

O, per dirla ancora in altri modi:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$$

Che strano oggetto sarà mai quel $T_n(x; x_0)$?

Definizione (Polinomio di Taylor):
Il polinomio $T_n(x; x_0)$ utilizzato nell'enunciato del teorema si chiama **polinomio di Taylor di grado n della funzione f nel punto** x_0 e rappresenta un'approssimazione della funzione vicino a x_0 .

Una piccola informazione: se $x_0 = 0$, il polinomio T_n viene spesso chiamato **polinomio di McLaurin**.

Osservazione La peculiarità del polinomio di Taylor sta nel fatto che il resto $R_n(x; x_0)$ definito come:

$$R_n(x; x_0) := f(x) - T_n(x; x_0)$$

È nient'altro che un infinitesimo di ordine superiore a $|x - x_0|^n$ per $x \to x_0$.

Procediamo a dimostrare il teorema di Taylor.

Dimostrazione:

Prendiamo in analisi il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

E applichiamo il teorema di de l'Hôpital, ottenendo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-2)} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Osserviamo che sia numeratore che denominatore sono infinitesimi, possiamo quindi applicare nuovamente il teorem di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

Iteriamo $n-1$ volte il processo (non siamo pazzi da farlo manualmente), ottenendo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Mettendo in evidenza il primo termine e il risultato finale, sappiamo che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Portando tutto al primo membro:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0 \\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0
\end{aligned}$$

Ovvero la conclusione.

Come utilizzare questo potentissimo strumento? Procediamo *funzione per funzione*, rimboccandoci le maniche, e otteniamo i polinomi (o serie, come vedremo) di Taylor associati ad esse.

1. **Esponenziale in** $x_0 = 0$ Prendiamo come primo esempio $f(x) = e^x$ nel caso in cui $x_0 = 0$ .Osserviamo immediatamente che *qualsiasi* derivata

di $f(x) = e^x$ è essa stessa e^x ; poiché $x_0 = 0$, sia ha che $e^0 = 1$ per qualsiasi derivata. È immediato il polinomio di Taylor, che è scrivibile in forma compatta di serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Si noti che la serie di Taylor per l'esponenziale coincide con la definizione data nella sezione delle serie numeriche (casualità?). Per $x_0 \neq 0$ la situazione non è così diversa:

$$e^{x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} = e^{x_0}\left[1 + (x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]$$

.

2. **Funzioni goniometriche in** $x_0 = 0$ Partiamo da $f(x) = \sin x$; osserviamo che tutte le derivate pari sono (a meno di cambi di segno) dei seni, mentre le derivate dispari sono coseni, ovvero:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \quad \forall k = 0, 1, 2, ...$$

Poiché $x_0 = 0$, abbiamo che:

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \forall k = 0, 1, 2, ...$$

Ne otteniamo il polinomio (o serie) di Taylor per il seno:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \forall x \in \mathbb{R}$$

Per la funzione coseno la situazione è analoga e inversa; ci risparmiamo i calcoli (semplici e immediati dati quelli per il seno, si consiglia di farli per esercizio) e otteniamo immediatamente il polinomio di Taylor per il coseno:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. **Altre funzioni**

   - Prendiamo ora in analisi $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}$ e $x_0 = 0$. Le derivate della funzione sono:

     $$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \cdots, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-k)^{k+1}}$$

     Da cui:

     $$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2, \cdots f^{(k)}(0) = k!$$

     Il polinomio di Taylor in questo caso è immediato e vale:

     $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

     Coerentemente con l'espressione della serie geometrica precedentemente data.

- Analizzeremo un ultimo caso: $\mathbf{f(x) = \ln(1 + x)}$, sempre nel caso $x_0 = 0$. Le derivate di f sono:

  $$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \cdots, f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

  Quindi ci troviamo nella situazione:

  $$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, \cdots f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

  Quindi il polinomio ottenuto sarà:

  $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Ci resta da analizzare un'ultima cosa: nella definizione del polinomio di Taylor, dicemmo che il resto della differenza tra la funzione ed esso era un infinitesimo di ordine superiore a $|x - x_0|^n$ per $x \to x_0$. Si può calcolare esplicitamente questo resto? La risposta è affermativa e lo dimostreremo attraverso il prossimo teorema.

Teorema (Resto in forma di Lagrange):

Sia $f(x)$ derivabile $n + 1$ volte; allora $\exists \xi \in (x, x_0)$ tale che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

Osservazione prima della dimostrazione: il primo termine della somma è il polinomio di Taylor per la funzione, il secondo termine è proprio il resto che cerchiamo.

Dimostrazione:

Consideriamo le funzioni:

$$F(x) := R_n(x; x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \quad \text{e} \quad G(x) := (x-x_0)^{n+1}$$

Osserviamo che $F(x_0) = G(x_0) = 0$, quindi possiamo applicare il teorema di Cauchy alle funzioni:

La relazione è valida per qualche $\xi_1 \in (x_0, x)$. Derivando le due funzione F e G:

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^k \quad \text{e} \quad G'(x) = (n+1)(x-x_0)^n$$

Se $n \geq 1$ è possibile riapplicare il teorema di Cauchy, trovando un $\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$ (quindi anche $\xi_2 \in (x_0, x)$)per cui:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}$$

Iteriamo il processo $n+1$ volte, dimostrando l'esistenza di un $\xi_{n+1} \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

Osserviamo che $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}$ e $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, deduciamo (**attenzione** poniamo qui $\xi = \xi_{n+1}$):

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(G(x) - G(x_0))$$

Ricordando le definizioni di F e G otteniamo la conclusione:

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

Come volevasi dimostrare.

Essenzialmente, abbiamo finito con la teoria. Il calcolo differenziale ci ha portati lontani, molto lontani nello studio delle funzioni attorno a determinati punti: possiamo adesso calcolare limiti di forme indeterminate, disegnare un grafico probabile della funzione, approssimarla a polinomi nell'intorno di determinati punti... Insomma, ce ne siamo dette tante e abbiamo scoperto cose che non stanno ne' in cielo ne' in terra. Nella prossima sezione tratteremo il calcolo di aree e scopriremo come tutto questo sia collegato anche al problema di calcolare aree di perimetri non conosciuti.

Capitolo 3

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Limiti/Definizione di limite e teorema ponte** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Limiti/Definizione_di_limite_e_teorema_ponte?oldid=28145 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Limiti/Limiti notevoli** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Limiti/Limiti_notevoli?oldid=28147 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Limiti/Continuità di una funzione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Limiti/Continuit%C3%A0_di_una_funzione?oldid=28143 *Contributori:* Sofia, V.e.padulano, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Limiti/Teoremi dei valori intermedi e esistenza degli zeri** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Limiti/Teoremi_dei_valori_intermedi_e_esistenza_degli_zeri?oldid=28151 *Contributori:* Roopi, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Limiti/Teorema di Weierstrass** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Limiti/Teorema_di_Weierstrass?oldid=28149 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/Definizione di derivata** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Definizione_di_derivata?oldid=28125 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/Punti di non derivabilità** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Punti_di_non_derivabilit%C3%A0?oldid=28131 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/Calcolo di derivate** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Calcolo_di_derivate?oldid=28123 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/Teorema di Lagrange** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_

a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Teorema_di_Lagrange?oldid=28137 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script

- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Derivate successive** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Derivate_successive?oldid=28127 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Studio asintotico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Studio_asintotico?oldid=28135 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Sommario sullo studio di funzione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Sommario_sullo_studio_di_funzione?oldid=28133 *Contributori:* Roopi, Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/Ordini di grandezza e teoremi di Cauchy e de l'Hôpital** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Ordini_di_grandezza_e_teoremi_di_Cauchy_e_de_l'H%C3%B4pital?oldid=28129 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Teorema e polinomio di Taylor** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Teorema_e_polinomio_di_Taylor?oldid=28139 *Contributori:* Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script

3.2 Immagini

- **File:1-over-x-plus-x_abs.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/1-over-x-plus-x_abs.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Cronholm144
- **File:Asymptote03.png** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/Asymptote03.png *Licenza:* Public domain *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Convex_function_2.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Convex_function_2.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Fulvio314
- **File:Cusp_function.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/38/Cusp_function.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Fulvio314
- **File:Derivative.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/Derivative.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Olivier Cleynen
- **File:Function_x\char"005E\relax{}2.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/Function_x%5E2.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:* Self-made using gnuplot *Artista originale:* Qualc1
- **File:Function_x\char"005E\relax{}3.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f5/Function_x%5E3.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:* self-made, based on Image:Function x^2.svg by Qualc1 *Artista originale:* Oleg Alexandrov
- **File:Hyperbola_one_over_x.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/Hyperbola_one_over_x.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:* No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). *Artista originale:* No machine-readable author provided. Ktims assumed (based on copyright claims).
- **File:Lim-secant.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dc/Lim-secant.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:*
  - Lim-secant.png

  Artista originale:
- derivative work: Pbroks13 (talk)

- **File:Mvt2_italian.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a8/Mvt2_italian.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:*
  - Mvt2.svg

  Artista originale: Mvt2.svg: 4C
- **File:Punto_angoloso.png** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Punto_angoloso.png *Licenza:* Public domain *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Rolle'{}s_theorem_2.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/Rolle%27s_theorem_2.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Fulvio314
- **File:Sommario-Studio-Funzione.svg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/c/c0/Sommario-Studio-Funzione.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Vertical_tangent.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e9/Vertical_tangent.svg *Licenza:* Public domain *Contributori:* Own work (Original text: *self-made*) *Artista originale:* –**pbroks13**[talk?]

3.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0